ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А. А. ЖДАНОВА

ФОРМАЛЬНАЯ ЛОГИКА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования РСФСР в качестве учебника для философских факультетов университетов

Издательство Ленинградского университета
Ленинград
1977

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

В основу учебника положен курс логики, читавшийся на философском факультете Ленинградского университета в течение ряда лет. В нем освещаются вопросы, относящиеся к общей и символической логике.

Учебник предназначен для студентов-философов и студентов других гуманитарных факультетов и педагогических вузов.

Во введении и первой части учебника § 1—13, 20, 28—31, 35, 36, 38 написаны проф. И. Я. Чупахиным; § 14—15, 17—19, 40 — проф. А. М. Плотниковым; § 16 — канд. философск. наук К. А. Сергеевым; § 21, 22, 42 — доц. Я. А. Слининым; § 23—27, 41 — доц. Б. И. Федоровым; § 32 — В. С. Бачмановым и проф. И. Я. Чупахиным; § 33 — канд. философск. наук А. Ф. Назаренко; § 34 — проф. Г. А. Подкорытовым; § 37, 39 — канд. философск. наук Ю. Н. Солониным. Во второй части учебника гл. I и II написаны доц. И. Н. Бродским; гл. III—VI — доц. О. Ф. Серебрянниковым.

Отв. редактор первой части — проф. *И. Я. ЧУПАХИН*
Отв. редактор второй части — доц. *И. Н. БРОДСКИЙ*

Рецензенты:
проф. *А. В. Дроздов* и кафедра философии Ленинградского педагогического института имени А. И. Герцена

Л $\frac{10508-127}{076(02)-77}$ 34—77

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Марксистская философия о мышлении

Формальная логика изучает мышление. Мышление исследуют и другие науки: философия, психология, физиология высшей нервной деятельности, кибернетика. Философия в той ее части, которую принято называть теорией познания, формулирует общие положения относительно сущности мышления и его роли в познании. От их усвоения во многом зависит эффективность изучения формально-логических вопросов.

Важнейшие из этих положений следующие: 1) мышление, как и сознание вообще, является функцией мозга, отражает процессы и явления внешнего мира; в сознание человека входит совокупность его знаний о различных предметах, их свойствах и отношениях; знание, отражение в мозгу человека любых объектов, есть идеальное воспроизведение последних в голове субъекта, которое осуществляется посредством ощущений, восприятий, памяти, воображения и мышления; 2) в отличие от непосредственных способов отражения действительности, называемых чувственными формами познания, мышление является *опосредованным и обобщенным* отражением ее, хотя свою роль в познании она выполняет только на основе чувственных форм отражения — ощущений, восприятий и представлений; 3) посредством мышления постигаются такие стороны реального мира, которые не могут быть раскрыты при помощи только одних чувственных форм отражения, например все законы науки являются результатом деятельности мышления; 4) критерием истинности наших знаний о действительности является практика, т. е. материальная деятельность людей.

Согласно марксистско-ленинской философии внешний мир существует независимо от сознания, а сознание вторично и является производным от него. Зависимость сознания от внешнего мира выражается, в частности, в том, что содержание любого результата познания в идеальной форме отражает содержание (сущность) предметов внешнего мира. Таким образом, результаты познания и сами изучаемые объекты различаются лишь по форме.

Не только конкретное содержание в мысленной форме является отражением содержания объекта, существующего независимо от сознания. Своеобразным отражением действительности являются и сами формы мыслей. Например, содержание анатомии человека отражает общие черты строения реально существующих людей, но и отдельные структуры мысли, общие для многих различных конкретных мысленных содержаний, также являются отражением сторон предметов внешнего мира, их свойств и отношений.

Чтобы получить результат, который не искажает исследуемый предмет, применяются разнообразные формы и приемы познания, называемые логическими операциями.

Эти операции применяются для изучения объектов не произвольно, а определяются свойствами познаваемого объекта, так как для исследования одной категории объектов могут быть достаточны одни логические приемы, а для другой — иные. Все это говорит о том, что познание является *активным* процессом. Особенно эта черта познания проявляется тогда, когда мы рассматриваем мышление.

§ 2. Мышление и язык

Марксистско-ленинская философия учит, что мышление и язык неразрывно связаны как в генетическом плане, так и функционально. Мышление не может существовать вне языка, представляющего собой систему словесных знаков. Без выражения человеком мысли в звуковых, письменных или других знаках ее нельзя передать, сообщить другому лицу и, следовательно, узнать самому о ее существовании.

Это значит, что мысль только благодаря языку становится непосредственной действительностью для других людей, а тем самым и для нас самих. Будучи непосредственной действительностью мысли, язык позволяет каждому поколению использовать знания, накопленные предшествующими поколениями, а не начинать каждый раз познание мира сначала.

Как свидетельствуют психологические эксперименты, школьники и взрослые часто затрудняются решить задачу, пока не сформулируют своих рассуждений вслух, а выражая мысли в речи, находят ее решение. Если при решении задачи, обдумывании какого-либо вопроса мы обходимся без рассуждений вслух, то в этих случаях, как показывают психологические исследования, мы пользуемся особым видом речи, которая называется внутренней речью. Таким образом, во всех актах мышления оно непосредственно связано с языком. И иначе быть не может. Выше было сказано, что человеческое мышление является опосредованным и обобщенным способом отражения действительности. Обобщение же неразрывно связано с отвлечением, абстрагированием тех или других свойств, отношений от конкретного предмета, которые в реальной действительности не существуют отдельно от последнего. Но мысленно отвлечь какое-либо свойство от предмета становится возможным только с помощью слова, которое позволяет фиксировать отвлекаемое свойство в сознании. Это вовсе не значит, конечно, что слово как определенная комбинация звуков изначально связано с содержанием определенной мысли. Связь звучания слова с определенным содержанием мысли, а в конечном счете с определенными свойствами реальных предметов устанавливается условно самими людьми, о чем говорят, в частности, различные наименования одних и тех же предметов в различных национальных языках.

Из сказанного видно, что человеческое мышление имеет *социальную, общественно-историческую* природу, т. е. оно могло возникнуть только в обществе. Это подтверждается, в частности, случаями воспитания животными детей человека, так как последние не проявляли способности к абстрактному мышлению, даже когда они уже возвращались в общество людей.

Несмотря на неразрывную связь языка и мышления, они представляют собой разные явления. Поэтому они исследуются разными науками: мышление изучается формальной логикой, а язык — языкознанием.

Все науки пользуются средствами естественного языка, прибегая в то же время к средствам искусственного языка. В современной формальной логике искусственный, так называемый формализованный язык очень широко применим. Однако из этого не следует, что она есть наука о формализованном языке, а не о мышлении. В мышлении формальная логика изучает логические формы и формально-логические законы, к рассмотрению общих понятий о которых мы переходим.

§ 3. Определение формальной логики

Понятие логической формы мышления является фундаментальным в формальной логике. Распространенное определение этого понятия гласит, что логическая форма есть способ связи частей мыслимого содержания. Данный способ связи может быть одним и тем же для неограниченно большого количества мыслей, каждая из которых отличается своим особым конкретным содержанием от всех других мыслей. В качестве примера могут служить мысли, выраженные в следующих трех предложениях: 1) «Сатурн есть планета; 2) «Глагол есть часть речи»; 3) «Кутузов есть великий полководец». Каждым из этих трех предложений выражается особая по своему содержанию мысль, отличная от других мыслей. Но если мы отвлечемся от конкретного содержания этих мыслей, то можно заметить, что в их структуре есть нечто общее. Это общее состоит, с одной стороны, в наличии элемента мысли, обозначающего предмет мысли, о котором нечто утверждается, и в наличии элемента, представляющего собой то, что утверждается относительно этого предмета. Кроме того, между двумя элементами в каждой из данных мыслей имеется одно и то же отношение, которое выражено словом «есть».

Чтобы отчетливее представить общую структуру в рассматриваемых трех мыслях, обозначим в каждой из них часть, соответствующую предмету утверждения символом S, а часть, соответствующую тому, что утверждается о предмете — символом P. В результате получается формула

$$S \text{ есть } P$$

— символическое выражение определенного вида логической формы мысли.

Символы S и P называются в логике переменными знаками, а слово *есть* — постоянным. Вообще переменные знаки — это такие знаки, вместо которых можно подставлять любые конкретные значения, получая в результате выражения мыслей с одинаковой логической структурой или с одной и той же логической формой. Постоянный знак есть знак, значение которого сохраняется при подстановке любых выражений вместо переменных.

В логике в качестве постоянных знаков используются такие слова естественного языка, как «все» и «некоторые»[1].

Поэтому каждая из двух формул:

(1) Все S суть P,

(2) Некоторые S суть P

является символическим выражением особой логической формы мысли. И это понятно, ведь независимо от того, какие слова или словосочетания естественного языка, обозначающие классы предметов, мы подставим вместо S и P в каждую из указанных формул, между полученными в результате такой подстановки мыслями будет существовать общее логическое различие, смысл которого можно выразить словами: «Подставив в формулу (1) вместо S и P слова или словосочетания, мы получим утверждение о том, что один класс предметов[2] целиком содержится в другом определенном классе предметов, что общие признаки предметов второго класса присущи каждому из предметов первого». Подстановка же определенных слов и словосочетаний в

---

[1] Слово «иекоторые» употребляется в логике ие в смысле «только иекоторые», а в смысле «иекоторые, а может быть и все».

[2] Слово «предмет» употребляется в логике в том смысле, что вообще может служить объектом нашего рассуждеиия, размышления.

формулу (2) будет приводить всегда к утверждениям, общий смысл которых состоит в том, что некоторая часть одного класса предметов содержится в другом классе предметов, что общие признаки предметов, составляющих второй класс, присущи части предметов первого класса.

Мысли простой логической формы, или структуры, могут вступать между собой в логическую связь, образуя мысли более сложной логической формы, тоже общей для множества мыслей разного конкретного содержания. В частности, мысли, взятые нами выше в качестве примера, могут являться элементами такой более сложной логической структуры,[3] которая в логике называется умозаключением и имеет много видов и разновидностей. Иллюстрацией одной из них являются следующие два примера:

1) Все цветы суть растения.
Все тюльпаны суть цветы.

Следовательно, все тюльпаны — растения.

2) Все материалисты в философии суть атеисты.
Все марксисты суть материалисты в философии.

Следовательно, все марксисты суть атеисты.

Здесь также в каждом из примеров при различном конкретном содержании мыслей налицо одна и та же логическая структура. Символически эта структура часто выражается в логике формулой:

Все M суть P.
Все S суть M.

Следовательно, все S суть P,

где M — символ, обозначающий одинаковые по смыслу выражения в первом и во втором утверждениях в каждом из приведенных примеров, символ P обозначает элемент мысли, содержащийся в третьем утверждении после слова «суть», а символ S — элемент мысли, содержащийся в этом же утверждении перед словом «суть». Одновременно каждый из элементов мысли, обозначенных символами S и P, содержится в одном из двух первых утверждений в рассмотренных примерах.

В реальном процессе мышления логические формы не существуют отдельно от конкретного содержания мыслей, но послед-

---

[3] В изучении логических структур очень важно приобретение навыков в решении логических задач. С этой целью рекомендуется книга проф. А. И. Уемова «Упражнения и задачи по логике», М., 1961.

нее не входит в предмет изучения формальной логики. Она исследует логические формы, взятые в отвлечении от конкретного содержания мыслей, подобно, например, грамматике или геометрии, из которых первая при установлении способов соединения слов в предложении отвлекается от содержания мыслей, обозначаемых словами, а вторая—от различных свойств тел при изучении их пространственных форм, хотя в реальном мире не существует ни пространственных форм тел без качественных свойств, ни слов и предложений, лишенных определенного смыслового содержания.

Формальная логика отвлекается от интересующих грамматику особенностей языковых выражений мысли, а грамматика оставляет в стороне изучаемый формальной логикой вопрос о логической структуре мысли.

В логических формах своеобразно отражаются отношения вещей внешнего мира, являющиеся объективными основаниями логических форм. «...Логические формы и законы, — писал В. И. Ленин, — не пустая оболочка, а *отражение* объективного мира».[4] Поэтому рассматриваемые логикой формы мышления имеют общечеловеческий характер в смысле независимости их не только от классовой, но и от национальной принадлежности людей, в то время как грамматические формы языка одной или нескольких наций отличаются от грамматических форм языка других наций.

С понятием логической формы тесно связано понятие формально-логического закона. Любой формально-логический закон есть отношение между логическими формами мысли. Подобно отношениям, выражаемым в законах любой другой науки, отношения между логическими формами мысли характеризуются свойством необходимости. Это значит, что формально-логические законы не зависят от воли людей, не могут быть нарушены без ущерба в постижении истины в процессе познания, подобно тому как при нарушении математических законов невозможно прийти к правильному вычислению орбит движения планет.

По своему содержанию мысли бывают истинными или ложными, т. е. соответствующими и не соответствующими действительности. Необходимым условием истинности всякой мысли является ее логическая правильность, т. е. соответствие логическим законам. Если в рассуждениях, теориях нарушены логические законы, то эти рассуждения, теории не могут быть истинными.

Но одна логическая правильность тоже не гарантирует истинности мысли. Рассуждение может состоять исключительно из ложных утверждений, согласующихся между собой; в нем

---

[4] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 162.

одно утверждение может находиться в отношении логического следствия к другим, выводиться из последних по логическим законам. Пример такого рассуждения:

Все звезды являются спутниками Земли.
Марс — звезда.

Следовательно, Марс — спутник Земли.

Это не исключает того, что в рассуждении могут быть все утверждения истинными, но логически не связанными. Пример:

Все птицы — позвоночные.
Все лебеди — позвоночные.

Следовательно, все лебеди — птицы.

В этом примере третье утверждение вовсе не вытекает из первых двух по законам логики. Если мы во втором и третьем утверждениях данного примера слово «лебеди» заменим словом «олени», то получится ложный результат при истинности исходных утверждений.

Из сказанного следует вывод: *формальная логика есть наука о формах, т. е. структурах, мысли.*

Часто в общих определениях этой науки делается указание не только на формы мысли, но и на законы, но, строго говоря, в этом нет необходимости, так как само понятие науки предполагает, что она изучает законы.

§ 4. Логика и психология

Хотя мышление является объектом исследования не только логики, но и психологии, предметы научного анализа у них разные. Психология изучает процесс мышления *индивида*; материалистическая психология мышление рассматривает в качестве воедино связанных внутренних характеристик личности, которая преломляет внешние условия. Это значит, что ее интересует мышление только в плане причинного отношения его к другим психическим явлениям, от чего логика отвлекается. Логику не интересует вопрос о том, *кто* мыслит — юноша или старец, вспыльчивый или спокойный человек и т. д., — а для психологии данный вопрос очень важен.

Логика вместе с тем не касается изучаемого психологией вопроса о побудительных мотивах мыслительной деятельности, в одних случаях проявляется познавательный интерес, а в других — воздействие внешних причин.

Законы, изучаемые психологией мышления, — это законы, в которых мышление показывается таким, каким оно определяется всеми компонентами психики индивида. С психологической точки зрения и мышление нормального человека, и бред безумца одинаково закономерны, так как и то, и другое мышление причинно обусловлено. Закономерности же логические — иного рода, в них раскрывается мышление таким, каким оно должно быть, чтобы не отклоняться от истины в результатах познания. В этом смысле логические законы можно назвать необходимыми нормами, принципами. Эта нормативность логических законов не имеет ничего общего с нормативностью права, с нормативностью законов и правил, установленных по воле самих людей, так как логические законы не зависят от воли людей.

При наличии указанных различий между формальной логикой и психологией эти науки дополняют друг друга в решении ряда практических задач, которые ставят перед собой люди. Как одна, так и другая содействуют формированию эффективной мыслительной деятельности: психология формулирует положения, позволяющие, в частности, определить, какие черты психики необходимы для овладения различными методами мышления, а логика раскрывает арсенал средств, знание которых усиливает познавательную функцию мышления. Для формальной логики важны некоторые закономерности формирования мышления, установленные психологией, так как знакомство с ними позволяет глубже понять сущность логических форм. Психология, в свою очередь, для раскрытия механизмов мыслительной деятельности субъекта использует достижения логики, в которых мышление раскрывается как орудие познания.

§ 5. Из истории логики

Изучение различных проблем логики в Древней Греции началось, по имеющимся данным, еще в V—IV вв. до н. э. Много внимания исследованию их уделял, в частности, древнегреческий философ-материалист Демокрит (ок. 460—370 до н. э.). Ему принадлежит рассмотрение широкого круга логических проблем — индукции, аналогии, определения понятий и гипотезы.

Философы-идеалисты Древней Греции также изучали вопросы логики. В частности, Сократ (ок. 469—399 до н. э.), который ничего не писал, а излагал свое учение устно, высказывал свои суждения о сущности и значении таких приемов исследования, как индукция и дедукция. Его ученик Платон (ок. 427—347 до н. э.) продолжил разработку вопроса о дефиниции, рассматривал логический прием деления, анализировал логическую форму суждения, которую он считал основным элементом мышления, и приближался к открытию основных законов формальной логики. Но ни один из упомянутых авторов не создал еще формальной логики как самостоятельной науки.

Эта задача была выполнена величайшим философом Древней Греции Аристотелем (384—322 до н. э.), которого принято поэтому считать отцом логики. Созданную им науку Аристотель называл не логикой, а аналитикой. Свое главное сочинение по логике Аристотель назвал «Аналитиками». В нем дается детальный анализ открытого им силлогизма как особой формы умозаключения, раскрывается сущность доказательства, приемов определения и деления и их значение в науке. Здесь же им показывается различие между научным и ненаучным знанием и освещается ряд других вопросов, связанных со структурой научного знания и логическими средствами познающего мышления.

Кроме этого труда к логическим сочинениям Аристотеля относятся: «Топика», «Категории», «О софистических опровержениях», «Об истолковании».

Последователи Аристотеля объединили все указанные его сочинения под общим названием «Органон» (орудие познания). Ряд важных логических проблем рассмотрен Аристотелем в его главном философском труде, получившем впоследствии название «Метафизика». В частности, именно здесь изложены им три известных основных закона формальной логики — закон тождества, закон противоречия и закон исключенного третьего.

Важно подчеркнуть, что Аристотель считал связь мыслей, выраженную в законах и правилах логики, не произвольной, а обусловленной связью самих вещей. Это значит, что он, в отличие от идеалистов Сократа и Платона, отстаивал материалистическую линию Демокрита в философских вопросах логики, хотя эта позиция была у него не до конца последовательной: при решении некоторых трудных философских вопросов логики, а также в анализе общих философских категорий он проявлял колебание между материализмом и идеализмом или высказывался в духе идеализма, в частности, как отмечено было В. И. Лениным, колеблющуюся позицию занял Аристотель в анализе так называемых общих понятий.

Во времена Аристотеля и еще ранее, а также позже, вплоть до II в. н. э., формальная логика разрабатывалась представителями школы стоиков — Зеноном (ок. 336—ок. 264 до н. э.), Хризиппом (ок. 281—208 до н. э.), Сенекой (ок. 4—65 н. э.) и др.

Формальная логика рассматривалась этой школой, просуществовавшей ряд столетий, как часть философии, в области которой стоики во многих случаях придерживались материалистических убеждений.

Особенности их направления в исследовании логических проблем состояли лишь в том, что в центр своего внимания ими были поставлены иные логические объекты по сравнению с теми, на которых концентрировалось внимание Аристотеля, и иначе, по сравнению с ним, определялось место исследуемых ими объектов в системе логики вообще. Например, если Аристотель главное внимание в своих сочинениях уделял исследованию категорического силлогизма, то стоики занимались преимущественно теми умозаключениями, в которые составными частями входили условные и разделительные суждения. Они исследовали ряд логических категорий, входящих составной частью в современную математическую логику (*импликацию, дизъюнкцию, конъюнкцию* и др.). При всем различии этих научных направлений в логике существовало их взаимовлияние, которое было плодотворным для общих результатов ее развития.

В средние века, которые характеризуются застоем (относительным, разумеется, а не абсолютным) во всех областях науки, чрезвычайно большим авторитетом пользовалась логика Аристотеля, подвергшаяся в условиях господства церковной идеологии переделке в соответствии с основными установками последней. Логику церковники стремились превратить в орудие обоснования антинаучных религиозных представлений о мире. Логика становится учением о мышлении, проникнутым духом схоластики, далеким от потребностей служить орудием в познании объективных закономерностей природы и общества.

Однако и под гнетом власти церкви, теологии, хотя медленнее, чем в античную эпоху, шло дальнейшее развитие логического анализа мышления, обогащение логики ранее неизвестными ценными выводами, многие из которых, правда, были преданы забвению на долгие времена.

Наиболее видными представителями этого периода были: французский философ-схоласт И. Росцелин (ок. 1050— ок. 1122), английский философ-схоласт Оккам Уильям (1290/1300— ок. 1349), шотландский философ-схоласт Дунс Скот (ок. 1265—1308), Ансельм Кентерберийский (1033—1109) и др.

Первые трое из названных ученых по своим философским взглядам были *номиналистами*. Они признавали реально существующими только единичные тела природы, а общие понятия считали лишь именами, названиями классов, сходных между собой вещей. Ансельм Кентерберийский защищал позицию так называемого *реализма*, представители которого вели яростную борьбу с номиналистами. Сущность теории средневекового реализма состояла в том, что общие понятия она рассматривала в качестве сверхъестественных самостоятельных сущностей единичных вещей. Эти понятия реалисты считали существующими во внешнем мире реально, независимо от единичных вещей.

И номиналисты, и реалисты в общем и целом не были материалистами в истолковании природы общих понятий, так как и те, и другие не признавали, что в общих понятиях своеобразно отражаются определенные черты существующих вне сознания вещей. Однако номиналистов следует считать выразителями материалистической тенденции в средневековой философии, сыгравшими положительную роль в борьбе против мистической теории средневековых реалистов.

Промежуточное положение между номиналистами и реалистами занимали *концептуалисты*, которых иногда называют умеренными номиналистами. К ним принадлежал, в частности, французский философ и логик Петр Абеляр (1079—1142). В отличие от номиналистов они признавали, что сущность общих понятий (*универсалий*) не сводится к названиям, а имеет мыслительное содержание, которое, однако, по мнению концептуалистов, не отражает никаких сторон реально существующих вещей, что противоречит последовательной материалистической теории познания.

Когда средневековый застой во всех сферах науки сменился периодом быстрого развития естествознания, применявшего многообразие эмпирических методов исследования и отвечавшего настоятельной потребности вновь возникавших отраслей промышленности, передовые философы стали все более сознавать несоответствие общего схоластического духа средневековой логики развитию естествознания. Многие из них считали, что данному этапу развития наук не соответствует и арсенал конкретных средств исследования, которые предлагала существовавшая тогда логика.

Конечно, без применения уже разработанного к тому времени логического аппарата и новое естествознание не могло бы существовать, как и вообще без такого аппарата не может быть логически состоятельного мышления. Но данного аппарата было недостаточно для удовлетворения потребностей, порожденных различными специальными науками того времени.

В такой ситуации, естественно, все чаще стали высказываться призывы создать новую логику. Эта идея овладела и сознанием великого английского философа-материалиста Фрэнсиса Бэкона (1561—1626), который был не только страстным, талантливым пропагандистом этой идеи, но и попытался практически реализовать ее в своем труде «Новый органон», который, по его мнению, должен был заменить аристотелевский «Органон».

Свою логику Бэкон считал подлинным средством открытий нового, а логику Аристотеля объявлял бесполезной для этой цели. Преимущество, силу своей логики он усматривал в индуктивном методе, который противопоставлялся им дедукции, силлогистике Аристотеля. Поэтому Бэкона называют творцом индуктивной логики. Но вопреки намерениям самого автора проведенный им логический анализ индуктивных методов не заменил теории дедукции, разработанной Аристотелем. Бэкон совершенно неправомерно противопоставил индукцию дедукции, преувеличил познавательное значение первой и преуменьшил значение второй.

В XIX в. английский философ и логик Джон Стюарт Милль (1806—1873) систематизировал исследования Бэкона в области индуктивных методов причинной связи явлений, и с этого времени вопросы индукции стали излагаться в руководствах по логике в качестве особой части.

Другой аспект развития формальной логики состоял в том, что в обеих ее частях — дедуктивной и индуктивной — стали применяться методы логических исчислений.

Особенно интенсивное развитие метода логических исчислений происходит в XX в.

В связи с проникновением математических методов в индуктивную логику последняя развивается как вероятностная логика, предметом которой является изучение методов оценки истинности гипотез.

Настоятельная необходимость применения метода логических исчислений порождалась развитием разных наук, в том числе математики и кибернетики. В частности, этот метод применяется к вопросам исследования оснований математики; математическая логика вместе с другими средствами познания образует теоретический фундамент современной вычислительной техники.

Одно из преимуществ математической логики состоит в том, что благодаря применяемому ею символическому аппарату можно выражать на точном языке сложные рассуждения, в которых логически связано множество элементов, трудно обозримое без выражения этих связей на языке символической (математической) логики.

Это вовсе не означает того, что все проблемы формальной логики решаются средствами логических исчислений. В частности, только средств логических исчислений недостаточно для исследования сущности понятия, соотношения понятия и слова, природы индукции, аналогии и т. д.

В конце XVIII — начале XIX в., т. е. до возникновения первой системы математической логики, в философии было разработано диалектическое мировоззрение и соответственно — всеобщий философский метод исследования явлений, т. е. диалектический метод. Всесторонняя разработка его, целая энциклопедия диалектики, была представлена в сочинениях немецкого философа Гегеля (1770—1831), ближайшим и наиболее выдающимся предшественником которого в данной области был Иммануил Кант (1724—1804).

Основоположники научного коммунизма К. Маркс и Ф. Энгельс критически переработали диалектику Гегеля и создали подлинно научную *материалистическую* диалектику, получившую дальнейшее развитие в трудах В. И. Ленина и в работах многих философов-марксистов.

Главное в этом философском учении, т. е. в диалектике, — это идея развития всех существующих процессов и явлений. Законы диалектики Гегель рассматривал как всеобщие, т. е. такие, которым подчиняются не только мышление, но все, что существует в мире. И это свое учение о всеобщих законах движения в мире как изменения вообще Гегель называл логикой. Маркс соответствующее философское учение всегда называл просто диалектикой. В подавляющем большинстве случаев Ф. Энгельс и В. И. Ленин также пользовались термином «диалектика» для обозначения этого учения в целом, а не для обозначения одной из функций его — функции изучения закономерностей, которым подчиняется движение, развитие познания от одной ступени к другой, более высокой. Рассматриваемая лишь в этой функции диалектика есть учение о процессе перехода от одних знаний к другим, для характеристики которых в философском плане необходимы разные философские категории.

Так, если в одном утверждении высказывается о единичном предмете какое-нибудь всеобщее свойство (пример: «тюльпан — красный»), в другом — относительное определение (пример: «это растение целебно»), а в третьем — субстанциональная определенность предмета (пример: «тюльпан — растение»), то с точки зрения диалектики в первом суждении выражена самая низшая ступень познания, во втором — более высокая, а в третьем — более высокая, чем во втором. Здесь оценка каждого из трех утверждений дается диалектикой на основании различия тех философских категорий, посредством которых характеризуется определение, высказываемое о предметах в каждом из трех рассмотренных утверждений.

Формальная логика при изучении структуры мысли отвлекается от этой стороны дела, а поэтому предметы формальной логики и диалектики, взятой в аспекте изучения ею мышления как инструмента познания, совершенно различны. Но различие предметов этих наук не означает отсутствия связи между ними. Дело в том, что диалектика, взятая в любом своем аспекте, может осуществлять анализ всего того, что входит в ее предмет, в полном соответствии с законами, изучаемыми формальной логикой, так как учение формальной логики о формах мысли относится, в частности, и к тем мыслям, которые составляют содержание диалектики как науки.

Формально-логические законы имеют методологическое значение для всех наук, в том числе и для диалектики, поскольку последняя руководствуется ими при решении своих специфических задач исследования.

Ф. Энгельс в произведении «Анти-Дюринг» писал о формальной логике, что она представляет «прежде всего метод для отыскания новых результатов, для перехода от известного к неизвестному».[5] В этом высказывании Энгельса имеется в виду то, что формальная логика исследует законы, по которым из каких-либо утверждений с необходимостью вытекают новые, отличные от них утверждения. Методологическое значение для всех наук имеет, в частности, положение формальной логики

---

[5] Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 138.

о том, что всякая истинная теория должна быть свободна от логических противоречий.

С другой стороны, требования, вытекающие из законов диалектической логики, выступают в качестве методологических принципов для всех наук, в том числе и для формальной логики, для которой содержание, составляющее ее предмет, есть сама структура мысли, взятая в отвлечении от конкретного содержания. Диалектическая логика, например, учит, что абстрактной истины нет, истина всегда конкретна; она также утверждает, что на определенном этапе изучения объекта, а именно, когда выделены и зафиксированы его всеобщие свойства и отношения, правильным в научном отношении методом дальнейшего его изучения будет метод восхождения от абстрактного к конкретному. Разумеется, эти требования являются всеобщими, а поэтому они относятся и к формальной логике.

Всеобщность диалектики как методологии состоит не только в том, что ее положения имеют методологическое значение для всех наук, но и в том, что они играют методологическую роль при рассмотрении *любых* сторон изучаемых объектов. Этим диалектика в своей функции методологии отличается от методологической функции положений других наук, в частности от положений, например, математики или формальной логики.

Исходя из закономерностей познания, можно заключить, что математические методы исследования станут применяться в будущем во всех науках, но это не будет означать того, что математические методы всеобщи в том же самом смысле, в каком речь идет о всеобщности диалектики как метода познания, потому что математические методы применимы только для исследования пространственных и количественных отношений в изучаемых объектах; качественные же стороны объекта ими не вскрываются.

Формально-логические методы имеют силу только в изучении структуры выводного знания. Следовательно, формальная логика в методологическом плане также отличается от диалектики; сфера применимости методологической функции последней, следовательно, шире, чем сфера приложения методологической функции формальной логики.

Из сказанного видно, что следование методологическим принципам диалектики в процессе исследования предполагает, что выполняются при этом все требования, вытекающие из формально-логических законов.

§ 6. Практическое значение формальной логики

В параграфах, предшествующих данному, уже показано, что соблюдение законов формальной логики в процессе получения выводного знания является *необходимым условием* достижения истины. А так как выводное знание имеет место во всех сферах мыслительной деятельности, то знание этих законов полезно в практике мышления любого человека, независимо от характера его профессии. Это не значит, конечно, что человек, не изучавший формальную логику, лишен возможности познавать мир вообще или делать научные открытия. Есть немало людей, которые являются неплохими мыслителями, не изучая логики. В этих случаях люди обходятся *естественной логикой,* которой они пользуются безотчетно. В то же время встречаются люди, изучавшие логику и нарушающие логические законы, правила.

Этот факт, однако, не может служить возражением против утверждения об исключительно большой пользе изучения логики точно так же, как не может служить возражением против утверждения о пользе изучения грамматики и арифметики факт, что при хорошем знании правил данных дисциплин люди нарушают их, а некоторые люди и без знания этих правил довольно грамотно говорят и правильно считают.

Конечно, без известной естественной логики невозможна познавательная деятельность мышления. Но если на основе этой естественной логики создана *наука логики,* то это значит, что мы приобрели мощное орудие, позволяющее работать в области познания более продуктивно, с большей эффективностью, чем при помощи только одной естественной логики.

Логика нужна всюду, где возникает потребность приводить в определенный порядок разрозненные, эмпирические понятия, систематизировать их и определять их точный смысл. Но особо важное значение она имеет:

1) для научной деятельности, так как логика дает нужную подготовку для занятий наукой. Каждая наука имеет дело с переработкой понятий, с систематизацией знаний, и в этом деле немаловажную роль играет знание логических правил. В наше время масса научных знаний увеличивается небывалыми ранее темпами, а следовательно, растут трудности усвоения этих знаний. Логика может и должна быть средством, помогающим уменьшить эти трудности, способствуя овладению логическим строем науки, что избавляет от необходимости усвоения массы деталей, содержащихся в ней. Овладение логикой, несомненно, способствует развитию творческого мышления, его активности;

2) особенно важна логика для занятий *в области философии,* потому что здесь познание в большей степени, чем в конкретных специальных науках, пользуется абстракциями и гораздо больше удалено от твердой почвы опыта;

3) большое значение имеет знание логики в научных спорах. Если два или более участников дискуссии исходят из одних и тех же истинных посылок, но в ходе рассуждений приходят к разным результатам, то все они не могут быть истинными, — истинным может быть только один результат, вывод. В этом

случае, чтобы принудить противника встать на истинный путь, надо раскрыть логические ошибки в его рассуждении, для чего необходимо знание логических правил.

Очень часто знания логических правил бывает вполне достаточно, чтобы обнаружить несостоятельность какого-либо рассуждения. Следующий пример может пояснить сказанное. Американский логик Беркли в одной своей книге сообщает, что в недалеком прошлом в речи одного из американских сенаторов содержались слова: «Все коммунисты нападают на меня. Он нападает на меня. Следовательно, он коммунист». Беркли совершенно справедливо заметил, что с логической точки зрения данное рассуждение сенатора тождественно следующему: «Все гусеницы едят капусту. Я ем капусту. Следовательно, я гусеница».

Данное рассуждение сенатора — пример нарушения элементарного логического правила. Главной причиной этой логической несообразности была, видимо, ненависть сенатора к коммунистам, а не его незнание логики. Но очень часто та же самая логическая ошибка допускается людьми именно по причине незнания логических правил. Автору этих строк во время лекций по логике для первокурсников приходилось нередко спрашивать студентов, например, следует ли заключение из утверждений: «Все электроны имеют отрицательный заряд. Данная частица — электрон?». И большая часть студентов обычно отвечала неправильно;

4) логика, кроме всего сказанного, имеет большое значение для выражения мыслей в письменной и устной речи. Ведь для того, чтобы слушатель или читатель с большей легкостью воспринимал мысли, излагаемые другим человеком, последний должен придать своим мыслям соответствующий порядок, который по существу есть логический порядок.

С созданием аппарата символической логики формальная логика стала играть более важную роль в развитии науки, особенно после того, как методы математической логики нашли применение в технике, в исследовании оснований математики, а также в разработке логических принципов построения науки.

Следует заметить, что одного знания логических правил недостаточно для успешной деятельности в той или иной области науки, потому что, во-первых, успехи в любой науке гораздо в большей степени зависят от глубины и широты познания того *содержания, которое логикой оставляется вне поля зрения,* чем от знания логических законов; во-вторых, успехи науки, особенно в наиболее сложных, обобщающих теориях, зависят от овладения учеными методологией материалистической диалектики и диалектической логикой. Но, как уже было замечено, подлинно диалектическое мышление предполагает подчинение формально-логическим законам,

§ 7. Структура формальной логики

Современная формальная логика является чрезвычайно разветвленной наукой и может быть разделена на части по разным основаниям. В зависимости от того, применяется ли математический аппарат (логические исчисления) или изучаются общие формы мысли без применения последнего, в ней выделяются две части: 1) общая (несимволическая) логика и 2) символическая (математическая) логика.

В свою очередь, общая логика подразделяется на два раздела по различию изучаемых объектов.

Первый раздел является учением об основных формах (элементах) мышления, без которых невозможно ни обыденное, ни научное мышление. К основным формам мышления относятся *понятия, суждения и умозаключения.* В этот раздел, естественно, включается учение о так называемых основных формально-логических законах.

Во всех науках исследование идет от простого к сложному. Поэтому в формальной логике в первую очередь следует рассматривать понятия, так как они лежат в основе всякого рассуждения. Отношения между ними образуют суждения, а определенные отношения между суждениями — умозаключения. Умозаключения образуются из суждений в соответствии с основными формально-логическими законами. Поэтому изложение последних должно предшествовать рассмотрению умозаключений.

Второй раздел посвящается изучению систематических форм, т. е. таких, без которых невозможно научное мышление. Он включает *определения, деления (классификации), доказательства, логические методы, связанные с анализом данных опыта.* Математическая (символическая) логика тоже имеет много разветвлений.

Заметим, что выражение «общая логика» в некоторых случаях употребляется для обозначения не той части, которая противополагается математической логике, а для обозначения части, которая отличается от прикладной логики. В этом смысле общая логика изучает формы и законы мышления без отношения к мыслимому содержанию, а прикладная — в отношении к некоторому содержанию. Прикладная логика имеет множество частей, в которых рассматриваются группы понятий, связанные в каком-либо отношении и в соответствии с этим требующие специальной логической обработки. В качестве таких частей логики могут быть временная логика, техническая логика и т. д., в которых строятся специальные системы исчислений.

Часть первая

ОБЩАЯ ЛОГИКА

ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ФОРМЫ И МЕТОДЫ МЫШЛЕНИЯ

Глава I

ПОНЯТИЕ

§ 8. Об определении и структуре понятия

В марксистской философии и советской логической литературе общепризнано, что в понятиях явления действительности отражаются в абстрактной, обобщенной форме. Именно в том, что понятие является мысленной абстракцией определенных сторон, черт, присущих предметам объективного мира, заключается его природа. Существенные для того или иного класса предметов их общие черты, свойства, преобразованные в голове человека, т. е. получившие идеальную, мысленную форму существования, становятся элементами содержания понятия.

Природа понятия отлична от природы чувственных форм отражения предметов внешнего мира в сознании человека — ощущения, восприятия и представления, потому что:

1) все чувственные формы воспроизведения предметов действительности в сознании суть наглядные образы их, а всякое понятие лишено наглядности. Мы оперируем понятиями «храбрость», «растение», «дружба» и «закон науки», но у нас нет наглядных образов соответствующих объектов познания, в то время как представление в сознании таких, например, предметов, как здание Московского университета, тот или другой портрет В. И. Ленина, картина К. Брюлова «Последний день Помпеи» и т. д., облечено в наглядные образы, которые могут быть вызваны в сознании в любой момент по собственному желанию каждым, кто хотя бы раз видел соответствующие предметы или знаком с ними по описаниям других лиц. Конечно, могут быть представления не только тех предметов, которые существуют или существовали, но и тех, которые созданы лишь в нашем воображении, например архитектор носит в голове образ того сооружения, которое он еще только собирается построить;

2) в чувственных формах познания объект воспроизводится в его индивидуальности, а в понятии фиксируются лишь общие черты многих предметов. Составляя себе понятие о предмете,

мы отбрасываем все живые подробности, которыми он отличается от других предметов, и оставляем только его общие, существенные черты. В частности, у каждого отдельного человека есть определенный рост, определенный цвет лица, но один человек — высокий, другой — низкий, у одного цвет лица румяный, у другого — бледный, у одного — белый, у другого — черный — все эти подробности не входят в общее понятие «человек».

Любое представление как наглядный образ предмета не может состоять из элементов, присущих всем предметам данного рода. Невозможно, например, представлять наглядно человека без определенного роста, но этот представляемый *рост* не может никогда совпадать с действительным ростом *каждого* из людей, в лучшем случае он случайно будет совпадать с ростом некоторых лиц;

3) в представлении могут фиксироваться живые подробности, которыми определяется внешняя сторона предмета, но при помощи лишь одних представлений невозможно проникнуть во внутренние, глубинные связи, отношения, познать, выражаясь другими словами, то в предмете, что составляет его существенные черты, его сущность. Цель выявления сущности предмета достигается уже при помощи мышления на основе переработки представлений в *понятия*. Оперирование понятиями есть необходимое условие существования науки.

Отражение внешнего мира в понятиях любой науки отличается от художественного освоения мира, так как в искусстве отражение его в сознании происходит в форме единичных образов, являющихся обобщениями действительности. Пояснением того, как это осуществляется в искусстве, могут служить следующие слова М. Ю. Лермонтова о Печорине: «Герой нашего времени, милостивые государи мои, точно портрет, но не одного человека: это портрет, составленный из пороков всего нашего поколения, в полном их развитии». [6]

В науке же такой путь обобщения невозможен. В ней обобщать — это значит приходить все к большим и большим абстракциям, к схематизму, который является могущественным средством, потому что научные схемы, абстракции оказываются необходимыми для правильного истолкования более частных явлений, имеющих жизненно важное значение на практике.

Понятие является формой мышления, отражающей предметы в их общих существенных признаках. Из этого следует, что не может быть понятия, содержание которого отражало бы свойства, присущие только одному предмету, взятому в его единичности. Это следствие было понятно уже Аристотелем, его особенно подчеркивал Гегель. С позиций диалектического

---

[6] Лермонтов М. Ю. Соч., т. 6. М. — Л., 1957, с. 203.

материализма данное положение было всесторонне обосновано классиками марксизма-ленинизма.

Рассмотрим кратко вопрос о признаках предметов, являющихся основой образования понятий.

Признаками называются черты сходства или различия предметов. Сходные признаки называются общими — в них выражается тождество предметов в определенном отношении. Признаки, которыми предметы отличаются друг от друга, называются отличительными.

Как в общих, так и в отличительных признаках могут фиксироваться существенные и несущественные свойства предметов. Следует различать два смысла выражения «существенное свойство»: 1) важность, значимость свойства одного предмета для другого предмета, в частности для удовлетворения тех или иных потребностей человека (например, для того, чтобы предмет годился ему в пищу); 2) свойство, определяющее характер, природу и направление развития предмета, безотносительно к тому, какое значение имеет данное свойство для других предметов. Существование предмета как предмета определенного рода, определенной категории невозможно, если отсутствует хотя бы один такой существенный признак.

Существенные признаки второго рода, вместе взятые, достаточны для выражения сущности предмета, а каждый из них в отдельности необходим для нее. Понятие существенного признака в первом смысле, в свою очередь, является относительным, т. е. в одном отношении могут быть существенными одни признаки реального предмета, в другом — другие, в третьем — третьи и т. д., если сам реальный предмет рассматривается с точки зрения его объективного отношения к разным предметам. Например, в каждом отдельном человеке нас могут интересовать различные стороны: или его способность выполнять сложную умственную работу, или возможности поднимать тяжести, или особенности голоса. Ясно, что первые два свойства несущественны для лиц, участвующих в хоре, а свойство выполнять с успехом какую-либо роль в выступлениях хора несущественно для лиц, которым надо поднимать большие тяжести или выполнять продуктивный умственный труд. Вместе с тем каждое из этих свойств, как и множество других, взятых в отдельности, несущественно для того, чтобы то или иное конкретное лицо оставалось человеком, а следовательно, эти признаки несущественны для понятия «человек».

Всякое понятие отражает сущность предмета, и этой сущностью, фиксируемой в одном каком-либо понятии, предметы отличаются от всех других предметов, сущность которых фиксируется уже в другом понятии.

Это не значит, конечно, что предметы нельзя различать по каким-либо несущественным признакам. Например, служащих, носящих специальную форму одежды, можно отличать по этой форме, которая, таким образом, становится отличительным признаком этих лиц, но она играет роль внешнего отличительного признака, а не признака, относящегося к сущности, скажем, военнослужащих. Поэтому нельзя противопоставлять отличительные признаки предмета, отраженные в его понятии, существенным признакам предмета, отраженным в том же самом понятии: отличительные признаки, отраженные в понятии, могут быть только существенными.

Нужно лишь иметь в виду, что, во-первых, признак предмета, отраженный в том или ином понятии, не может быть отличительным, если он не является достаточным для отличения предмета от всех других предметов. Например, в понятии «капитализм» имеется признак «быть товарным хозяйством», но по одному этому признаку капитализм нельзя отличить от простого товарного хозяйства. Когда понятие содержит в себе несколько признаков, то только их совокупностью, единством предметы, отражаемые данным понятием, отличаются от всех других предметов.

Во-вторых, по единству признаков, отражаемых в понятии, можно отличать с качественной стороны не один экземпляр, или, как говорят в логике, индивидуум, от всех других индивидуумов, а только экземпляры, отражаемые в одном понятии, от экземпляров, отражаемых в другом понятии. Так, экземпляры, индивидуумы, отражаемые в понятии «человек», можно отличать по признакам этого понятия от многих индивидуумов, отраженных в таких понятиях, как «растение», «дом», «цветы» и т. д., т. е. по признакам, отраженным в определенном понятии, можно отличить только *класс* соответствующих предметов, отраженных в других понятиях.

Признаки предметов подразделяют еще на основные и производные, случайные и необходимые. Основные признаки — это те существенные признаки, из которых выводятся как необходимое следствие другие существенные признаки, а производные — те признаки, которые выводятся из основных. Так, в понятии равностороннего треугольника равенство сторон является основным признаком, а равенство углов — производным. В понятии «империализм» господство монополистических объединений является основным признаком, а господство финансового капитала, преимущественный вывоз финансового капитала над вывозом товаров, территориальный раздел мира крупнейшими капиталистическими странами и разделение посредством силы сфер влияния между крупнейшими монополистическими объединениями — производные признаки.

Необходимые признаки — это те же существенные признаки, взятые в отношении признаков, которые не являются ни основными, ни необходимыми следствиями из них. Понятие «необходимые признаки» означает, что без них не может существовать ни один индивидуум данного класса предметов.

У самих предметов случайные признаки — это признаки, принадлежащие либо только некоторым представителям класса, либо всем его представителям, но не являющиеся необходимым следствием основных признаков. Например, светлые волосы, высокий рост, умение говорить на нескольких языках — все это случайные признаки первого рода, т. е. такие, которые имеются только у некоторых представителей класса «человек». В качестве примера второго рода случайных признаков можно указать на черный цвет перьев у ворон. Этот второго рода случайный признак называется нередко «неотделимой случайностью».

Каково же отношение понятия к указанным различным видам признаков? Понятие фиксирует в предмете существенные признаки, является их отражением. Сущность предмета как представителя определенного класса отражает только одно понятие. Если требуется охарактеризовать конкретный предмет в его индивидуальности, надо указать связь основной природы этого предмета с различного рода случайными признаками. Без них нельзя дать изображения конкретного предмета в его полноте. Эта полнота изображения может быть только относительной в каждый данный момент, так как для полного изображения предмета во всех связях и отношениях нужна бесконечная сумма понятий.

В зависимости от количества существенных признаков предметов, фиксируемых понятиями, последние делятся на простые и сложные. В пределе число элементов содержания понятия может быть равным единице, например в понятии «существование», но в понятии меньшей степени абстракции их всегда больше, и все вместе они составляют единое логическое целое, соответствующее единству признаков в предмете. Метонимически элементы содержания понятия и сами называются *признаками.*

Понятия, имеющие в своем содержании больше одного элемента, различаются, следовательно, как более простые и менее простые, или, что то же самое, как более сложные и менее сложные.

Определения «простое» и «сложное» относительны, т. е. одно понятие может быть более простым по сравнению с другим и более сложным по сравнению с третьим. Так, понятие «труд» является более сложным по сравнению с понятием «затрата человеческой энергии». Выражение «более сложное понятие» в указанном здесь смысле означает, естественно, что оно содержит больше информации по сравнению с менее сложным понятием, что содержание простого понятия может составлять часть содержания более сложного.

Содержание всякого сложного понятия представляет собой синтез элементов, их единство. Особенность этого единства характеризует структуру понятия, в которой существенным является различие между родовым признаком, который часто называют *главной частью* содержания понятия, и видовой разницей, которая называется обычно *побочной частью* содержания понятия. Главная часть отвечает на вопрос: «кто или что?», а побочная — на вопрос: «какой?». Например, в понятии «квадрат» главной частью является понятие «прямоугольник», а побочной — понятие «имеющий равные стороны». Побочная часть может быть *ближайшей* и *отдаленной* в зависимости от того, примыкают ли соответствующие признаки к главной части содержания понятия непосредственно или посредством других признаков. Например, в понятии «участник республиканского конкурса на лучшую студенческую работу» ближайшая побочная часть содержания понятия выражена словом «конкурса», а самая отдаленная — словом «республиканского».

Поэтому символически содержание какого-либо понятия N может быть выражено формулой: $N = Aabcd$, где каждый из символов A, b, c, d обозначает один из рассматриваемых здесь в совокупности мыслимых признаков предметов, которая представляет возможный ответ на вопрос «что это?» и не содержит в себе ни утверждения, ни отрицания о каких-либо предметах.

Все сказанное можно резюмировать словами: *понятие*[7] *есть мысленное отражение в форме непосредственного единства общих существенных признаков предметов.*

Содержанию понятия не всегда соответствуют реальные целостные предметы. В форме понятия могут быть объединены мысленные элементы, которые не соответствуют действительности, как, например, понятия о фантастических существах и некоторые другие. Соотношение между этими двумя случаями мысленного единства аналогично соотношению между действительным и мнимым выражением цены товара (когда предмет не имеющий стоимости, продается по определенной цене).

Против распространенного в литературе определения понятия как формы отражения в сознании общих существенных признаков предметов резонно выдвигается возражение, что данное определение не отграничивает понятия от суждения, поскольку в суждении тоже могут фиксироваться общие существенные признаки. В этом отношении сформулированная нами дефиниция понятия имеет преимущество: против нее упомянутое возражение будет неосновательным. В суждении устанавливается отношение присущности или неприсущности общих признаков предметам определенного рода, а понятие, согласно нашему определению, этим свойством не обладает.

---

[7] Слово «понятие» — многозначно, мы его будем употреблять лишь в указанном смысле.

§ 9. Основные методы образования понятий

Определение, которое дано понятию выше, предполагает, что образование понятий связано с определенными действиями мышления, которые позволяют установить общие признаки у предметов, выделив в них существенные и несущественные признаки, создать из выделенных существенных признаков определенное единство. Взятые в отношении к достигаемой посредством их цели — к образованию понятий, эти действия выступают в качестве методов или приемов образования понятий. К этим методам относятся:

а) *анализ* — мысленное расчленение содержания предмета на составляющие его свойства, признаки;

б) *сравнение* — установление сходства и различия между рассматриваемыми предметами;

в) *синтез* — мысленное соединение признаков, свойств предмета, отражаемых содержанием понятия;

г) *абстрагирование* — выделение единства признаков, составляющих содержание понятия, из всей совокупности признаков предметов;

д) *обобщение.* Действия абстрагирования (отвлечения) и обобщения неразрывно связаны. Точнее: это единый двусторонний процесс. Действие выделения признаков определенного рода есть абстрагирование по отношению к этим выделяемым признакам; оно есть обобщение, если речь идет о более богатой совокупности признаков, которыми обладают различные виды предметов, соответствующие образуемому понятию.

Так из понятия «человек» в результате отвлечения получаются признаки «способный к производству орудий труда», «способный ощущать», а в результате обобщения — общие понятия «животное», «организм».

§ 10. Соотношение между содержанием и объемом понятия

Содержание понятия составляют все его элементы, которые могут быть выделены в качестве отдельных понятий. *Объем* понятия есть все другие понятия, для которых оно служит признаком, главной их частью.

Понятно, что такая совокупность понятий может быть получена путем присоединения к данному понятию разных признаков. Это можно представить в виде следующей схемы:

$$A$$
$$Aa,\ Ab,\ Ac,\ Ad,\ Ae\ \ldots$$

Понятие A («человек») будет подчиняющим, или родом, а понятия Aa, Ab, Ac и т. д. (русский, англичанин, немец и т. д.) — подчиненными.

Иногда объем понятия называют «множеством предметов», которые мыслятся посредством данного понятия. Но это определение неточно, так как логика изучает отношения между понятиями, а не между предметами.

Из сказанного следует, что если признается наличие объема понятия A, то это значит, что должно признаваться наличие понятий, для каждого из которых оно является частью содержания; отсутствие же их означает отсутствие и самого понятия A, так как понятий без объема не бывает. Но это не означает невозможности понятий, которым не соответствует ни один реально существующий предмет. Такими понятиями, в частности, являются понятия о фантастических существах (например, понятия «кентавр», «русалка» и т. д.), которые в логическом смысле имеют объем, как и понятия о реальных предметах или части их.

Приведенная выше характеристика объема и содержания понятия представляет собой достаточное основание для вывода об отношении между объемом и содержанием понятий: если содержание понятия A находится в содержании понятия B, то это последнее находится в объеме первого. Наоборот, если понятие B содержится в объеме понятия A, то последнее составляет часть содержания первого. Содержание и объем понятия, таким образом, находятся в обратном отношении.

Взятая без пояснений, эта формулировка может быть истолкована по-разному, в том числе и в таком смысле, который позволяет утверждать несостоятельность закона обратного отношения между объемами и содержаниями понятий. Данная формула только приблизительно и сокращенно выражает суть дела, а потому требует некоторых оговорок. Например, в ряде случаев можно выделить класс предметов по наличию у каждого элемента этого класса одной совокупности признаков и в то же время выделить тот же самый класс предметов по наличию у каждого элемента класса иной совокупности признаков. Когда это имеет место, говорят, что содержание понятий различно, а объем их одинаков. Часто такую ситуацию иллюстрируют понятиями: 1) «равносторонний треугольник», 2) «равноугольный треугольник».

Равносторонность и равноугольность треугольника — такие свойства, из которых одно не существует без другого; они существуют только вместе, и если один из таких признаков прибавляется к содержанию понятия, то это не ведет к уменьшению объема.

Однако нельзя отрицать того, что истинными являются следующие суждения: 1) «равносторонний треугольник есть равноугольный», 2) «равноугольный треугольник есть равносторонний».

Но раз эти суждения истинные, то первое из них указывает на то, что в содержание понятия «равносторонний треугольник» входит признак «быть равноугольным», а второе суждение указывает на то, что в суждение понятия «равноугольный треугольник» входит признак «быть равносторонним». В пользу такого мнения резонно высказать следующее соображение.

Несомненно, что равноугольность есть признак, производный от равносторонности треугольника. А производные признаки многие логики включают в то понятие, элементами содержания которого являются соответствующие основные признаки. Сказанное, разумеется, не означает тождества содержаний понятий «равноугольность» и «равносторонность», а означает только то, что эти два понятия составляют видовое отличие одного понятия: «ограниченная тремя сторонами плоская геометрическия фигура, обладающая равенством сторон, неразрывно связанным с равенством углов».

Иначе: закон обратного отношения между объемами и содержаниями понятий имеет силу только по отношению к тем понятиям, из которых одно является подчиненным, а другое — подчиняющим.

Если учесть это условие, то можно сказать, что всякое увеличение элементов содержания понятия влечет за собой уменьшение объема, а всякое уменьшение содержания ведет к увеличению объема. И в этом состоит суть закона обратного отношения между объемами и содержаниями понятий.

При наличии сформулированных нами условий, которые, как правило, указываются в литературе, упомянутый закон не имеет исключений, как всякий закон вообще. Тем не менее вокруг этого закона велись и ведутся споры. В качестве примера, якобы опровергающего этот закон, еще в первой половине XIX в. чешский ученый Б. Больцано приводил следующие два понятия: 1) «люди, знающие все европейские языки»; 2) «люди, знающие все живые европейские языки». Понятие (2), по мнению Больцано, имеет большее содержание и больший объем по сравнению с понятием (1). С этим мнением согласны некоторые современные исследователи.

Но к такому выводу можно прийти только при условии, если подменять сравнение элементов содержания понятий сравнением количества слов, выражающих содержание сопоставляемых понятий. Чтобы эта подмена стала совершенно очевидной, сформулируем понятие (1) следующим образом: «люди, знающие все мертвые и все живые европейские языки». Несомненно, что это выражение в логическом отношении равнозначно выражению «люди, знающие все европейские языки». Этой заменой одного выражения другим мы достигли, следовательно, только явного формулирования признаков «знающие все мертвые европейские языки» и «знающие все живые европейские языки», которые имплицитно содержались в выражении «люди, знающие все европейские языки».

Обозначив более общее понятие словосочетанием, имеющим меньшее количество слов, чем словосочетание, которым он обозначил менее общее понятие, и приняв количество слов за критерий сложности содержания понятия, Больцано пришел к неверному выводу, что большее по объему понятие имеет в данном случае и большее содержание.

Превратное понимание соотношения между объемом и содержанием понятий у некоторых авторов бывает связано со смешением различных смыслов слова «общее»: «общее» в смысле «присущее многим» смешивается с общим как определенной совокупностью каких-либо предметов. В каком же смысле употребляется выражение «общее» при характеристике понятий? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим следующие известные высказывания: 1) «первая отличительная черта понятия — всеобщность»; 2) «нельзя в общее понятие включать все признаки явлений, которые входят в объем данного понятия».

Ясно, что когда этими словами характеризуется содержание понятия, то в соответствующих случаях высказывается мысль о том, что данное содержание присуще *всем* предметам данного рода в качестве черты или сущности последних, ни в коем случае не совпадая со всем богатством определений (признаков), которыми обладает каждый предмет в отдельности. Именно о такого рода «общем» В. И. Ленин говорил, что оно есть частичка, сторона отдельного, которое не полностью входит в «общее».[8]

В других же случаях «всеобщность» и «общее» употребляются, в частности В. И. Лениным, в ином смысле, а именно в смысле «все», т. е. указанные выражения употребляются для обозначения всего того, что относится к кругу предметов, явлений того или иного рода. В этом, втором смысле, полагаем мы, идет речь у В. И. Ленина о всеобщем в известных его словах в «Философских тетрадях»: «„Не только абстрактно всеобщее, но всеобщее такое, которое воплощает в себе богатство особенного, индивидуального, отдельного...“».[9] Всеобщее в последнем смысле не может быть отличительной чертой понятия, независимо от того, рассматривается ли понятие в формальной логике или в логике диалектической.

Когда мы, например, высказываем предложение: «В стране проведена *всеобщая* перепись населения», оно равнозначно по смыслу предложению: «Все люди страны были охвачены переписью»; то, к чему относится определение «всеобщности», в данном контексте включает в себя все богатство особенного и единичного, так как в данном случае определение «всеобщности» относится не к содержанию понятия, а к совокупности

---

[8] См.: Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 318.
[9] Там же, с. 90.

людей страны, которые могут быть подразделены на особые группы, скажем, по возрасту, полу, национальности и т. д.

Исходя из таких предпосылок, касающихся смысла разобранных выражений, невозможно не прийти к убеждению в правильности закона обратного отношения между объемом и содержанием понятий, если употреблять выражения «объем понятия» и «содержание понятия» в обычном смысле и само выражение «понятие» применять в том значении, которое указывается в определении понятия. Если эти выражения употреблять в других значениях, то, конечно, какие бы соотношения между объемом и содержанием ни устанавливались, они не будут иметь никакого отношения к вопросу о формально-логическом законе, о котором в данном случае идет речь.

Содержанием понятия некоторые авторы иногда называют глубину знания, а объемом его — широту знаний в какой-либо области, т. е. применяют эти выражения не в общепринятом в формальной логике смысле.

Имея в виду именно это значение слов «объем» и «содержание», нельзя утверждать, что существует закон обратного отношения между объемом и содержанием понятий. Заметим, что выражение «объем понятия» в формально-логическом смысле несовместимо с утверждением о наличии понятий с нулевым объемом. В объеме понятия имеется, по меньшей мере, один член.

Если члены объема понятия не могут быть частями содержания других понятий, то они называются *индивидуумами,* а в противном случае — *видами.* Примеры индивидуумов: «самая высокая гора в Европе», «столица СССР». Видами являются понятия: «чех», «поляк», «русский» и т. д. по отношению к понятию «славянин», которое для них является *родом.* Понятия рода и вида — относительные: одно понятие может быть родом по отношению к другому и видом — по отношению к третьему. Так, уже названное понятие «славянин» является родом по отношению к понятиям «русский», «поляк», «чех», «болгарин» и др., но видом по отношению к понятию «человек».

В практике мышления важно учитывать различие отношения рода и вида от отношений части и целого. Целое состоит из своих частей, а род в логическом смысле состоит из видов как своих частей лишь тогда, когда род и вид рассматриваются со стороны их объемов. Взятые же со стороны содержания, они находятся в обратном отношении, т. е. род является частью вида. Примеры: «Млекопитающее есть позвоночное», «Тюльпан есть растение». О части же, которая не является видом, нельзя утверждать, что она есть целое. Пример: крыша есть часть дома, но нельзя сказать, что крыша есть дом.

Имеются понятия, которые являются *только* родами по отношению к другим понятиям, а видами не могут быть. Такие понятия называются категориями. У них наибольший объем и наименьшее содержание по сравнению с остальными понятиями. Примеры категорий: «вещь», «свойство», «отношение», «время», «пространство», «движение» (в смысле изменения вообще), философское понятие материи и т. д. Приведенные примеры являются философскими понятиями. От них отличаются категории частных наук, которые не могут быть видами по отношению к понятиям этих же наук, но являются видами по отношению к философским категориям. Примеры категорий в частных науках: «живой организм» — в биологии, «элементарная частица» — в физике элементарных частиц, «фигура» — в геометрии, «атом» — в химии и т. д.

В рамках философии категории менее общей философской теории могут быть видовыми понятиями по отношению к категориям более общей философской теории. Например, в философии категория общественного бытия является видовым понятием по отношению к категории «бытие», а категория общественного сознания — видовым понятием по отношению к категории «сознание».

Все философские категории, являясь отражением различных сторон действительности в сознании людей, играют чрезвычайно важную методологическую роль в специальных частных и философских науках. В формальной логике особенно широко применяются категории «вещь», «свойство» и «отношение». Поэтому рассмотрим эти категории подробнее.

Объекты, обозначаемые категорией «вещь», отличаются от объектов, обозначаемых категорией «свойство» и категорией «отношение», тем, что объекты первого рода обладают относительной самостоятельностью существования, которая проявляется, в частности, в том, что каждая отдельно взятая вещь (например, отдельное яблоко, отдельная звезда, отдельный человек, отдельная молекула какого-либо вещества и т. д.) имеет особые пространственные границы в системе вещей объективного мира, отличные от границ других вещей. Свойства же вещей, например цвет, консистенция, не имеют самостоятельно никаких пространственных границ. То же самое можно сказать и об отношениях вещей. Например, отношения «больше», «меньше» или отношения любви, дружбы не существуют без вещей, людей.

Каждая вещь представляет собой совокупность свойств, и последние находятся в тех же самых пространственных границах, в каких существует сама вещь, как бы ни менялись эти границы в связи с движением вещи как изменением вообще, ибо существуют не свойства как таковые, а только вещи, обладающие свойствами. Вещь может лишиться того или иного свойства, продолжая самостоятельно существовать в качестве особого объекта, хотя совершенно без свойств вещей не бывает.

Вещь может лишиться и отдельных отношений с другими вещами, оставаясь сама собой. Что касается связи свойств и отношений, то важно отметить здесь то, что свойства вещей проявляются в отношениях вещей друг к другу либо в отношениях одной части вещи к другой.

Конечно, любое отношение может иметь свойство, а свойство, в свою очередь, может находиться в отношении к чему-либо, но это не означает, что эти категории являются тождественными. Различие между ними подразумевается в известных словах Маркса о том, что свойства вещей не создаются в их отношениях, а лишь проявляются в них.

Одно из отличий свойства от отношения заключается в том, что свойство присуще отдельно взятой вещи, а отношение может существовать лишь по меньшей мере между двумя вещами.

§ 11. Виды понятий

В содержании понятий могут мыслиться либо признаки одной категории вещей, явлений действительности, либо признаки предметов других категорий, например категорий вещи, свойства, отношения, времени, пространства и т. д. В зависимости от этого, а также в зависимости от степени общности понятия делятся на:

1) *регистрирующие* и *нерегистрирующие*. Основанием этого деления является наличие или отсутствие в побочной части содержания понятия таких признаков, которые отвечают на вопросы: «где?», «когда?», «какого рода *индивидуум*?». Если в содержании понятия имеются признаки, отвечающие на такого рода вопросы, то они называются регистрирующими, в противном случае — нерегистрирующими.

Примеры регистрирующих понятий: «люди, живущие в настоящее время в Европе», «Балтийское море», «Л. Н. Толстой», «поэты XIX века», «бойцы Н-ской дивизии» и т. д.

Понятия этого вида, как ясно из приведенных примеров, определены не только качественно. Посредством части признаков их содержания определяется так или иначе и численность мыслимых предметов, выделяемых из общего числа предметов, имеющих качественную определенность, которая представлена главной частью данного понятия. Конечно, количество предметов в соответствующих случаях не обязательно выражено определенным числом. Здесь важно только, что мыслится некоторая часть предметов с данными свойствами, за пределами которой логически мыслимы предметы со свойствами, соответствующими той же самой главной части содержания понятия. Например, в понятии «дождевые капли, выпавшие в XX веке», не фиксируется определенное число капель, но устанавливается часть всех капель дождя путем указания временных рамок, за пределами которых логически мыслимы предметы (т. е. капли дождя) того же рода.

Нерегистрирующие понятия являются определенными лишь *качественно*. В них нет признаков, выделяющих в классе предметов данной качественной определенности, какой-либо их части путем фиксирования пространственных или временных границ или посредством указания на единичность предмета. Поэтому они иногда называются открытыми в отличие от регистрирующих понятий, называемых иногда закрытыми. Примеры нерегистрирующих (открытых) понятий: «человек», «цветы», «животное», «храбрость», «слово» и т. д.

Любое регистрирующее понятие при помощи логической операции ограничения может быть превращено в единичное понятие, а открытое понятие при любом его ограничении не может стать единичным. Открытые понятия могут отличаться друг от друга по степени общности, а следовательно, и по степени абстрактности и по степени сложности, но никогда не могут стать единичными.

Из сказанного выше следует, что для превращения открытого понятия в понятие регистрирующее требуется содержание первого мыслить в единстве либо с признаками понятия «единичный предмет», либо с признаками понятия «конечное множество предметов». Для обозначения открытого понятия можно при этом применять символ $Aвc$, а для обозначения закрытого, регистрирующего — символ $(Aвc)$. В свою очередь, символом $E(Aвc)$ обозначим единичное регистрирующее понятие, а символом $M(Aвc)$ — множественное регистрирующее понятие.

Заметим, что единичность предмета в данном случае противопоставляется множественности предметов, а не общности понятия. Конечно, слово «общность» может быть употреблено вместо слова «множественность», но тогда оно имеет другой смысл, а не тот, который имеется в виду, когда говорят, что всеобщность понятия заключается в том, что признаки, отражаемые им, присущи неопределенному множеству элементов его объема.

Когда говорят, что понятие обладает чертой общности, или всеобщности, слово «общность» употребляется в том смысле, что в понятии отражаются признаки, общие для всех предметов данного рода, признаки одинаковые, а когда единичность противопоставляется общности при различении двух видов регистрирующих понятий, то слово «общность» понимается как совокупность одинаковых в каком-нибудь отношении элементов множества предметов. Поэтому соответствующие понятия можно назвать *множественными*. Это показывает, что единичное понятие не несет большей информации о качественных сторонах предмета по сравнению с множественными.

Учитывая отмеченные выше особенности регистрирующих и открытых понятий, можно сказать, что понятие объема имеет различный смысл в применении к открытым понятиям, с одной стороны, и к регистрирующим понятиям — с другой. По отношению к первым под элементами объема следует понимать индивидуумы в логическом смысле слова, а во втором — виды понятий, на которые подразделяется данное понятие, характеризуемое большей степенью общности по сравнению с каждым из видов.

По степени общности открытые (качественные) понятия, в свою очередь, подразделяются на более общие и менее общие. Первые из них будем называть *всеобщими*, а вторые — *особыми* (частными). Всеобщее относится к некоторым другим понятиям как род к виду, а особенное может и не подразделяться на виды. Оно может относиться лишь к множеству действительных или только мыслимых предметов, т. е. к индивидуумам. Примеры всеобщих понятий: «живое существо», «геометрическая фигура», «жидкость» и т. д. Соответственно примеры особенных понятий: «человек», «ромб», «вода».

Как известно, в логическом смысле индивидуумом называется понятие, которое неделимо на виды или на индивидуумы, о которых можно было бы высказать содержание данного понятия в качестве предиката. А в этом отношении отдельно взятая мыслимая вещь и отдельно взятый какой-либо агрегат (собрание) вещей не различаются. Поэтому на логической характеристике общих понятий это различие индивидуумов не сказывается, вследствие чего правы те, кто считает, что собирательные понятия могут быть только единичными.

Регистрирующие понятия по объему, т. е. по количеству мыслимых посредством них индивидуумов, делятся на общие (множественные) и единичные. Примеры множественных понятий: «участник боев в Великой Отечественной войне Советского Союза», «жители Ленинграда», «горы Кавказа» и т. д. Примеры единичных понятий: «В. В. Маяковский»; «этот человек», «основоположник социалистического реализма», «самый большой город СССР» и т. д.;

2) *пустые* и *непустые*. Пустыми называются понятия, которым не соответствует ни один предмет в объективном мире. Примеры пустых понятий: «теплород», «вечный двигатель», «кентавр», «человек, пробежавший 100 км в минуту» и т. д. Непустыми являются понятия, соответствующие каким-либо предметам действительности. Примеры непустых понятий: «планета», «растение», «идеология», «теория» и т. д.;

3) *конкретные* и *абстрактные*. Первые из них являются понятиями о предметах, а вторые — о свойствах и отношениях. Примеры конкретных понятий: «машина», «растение», «человек» и т. д. Примеры абстрактных понятий: «мужество», «белизна», «красота» и т. д.;

4) *абсолютные и относительные*. Каждое из относительных понятий имеет в своем содержании признак, фиксирующий отношение одного предмета к другому, а в содержании абсолютного (безотносительного) понятия такой признак отсутствует.

Примеры абсолютных понятий: «здание», «искусство», «наука», «писатель» и т. д. Примеры относительных понятий: «отец», «жена», «учитель» и т. д. Относительные понятия отличаются от понятий об отношениях, таких, как «севернее», «выше», «меньше» и т. д.;

5) *положительные и отрицательные.* Понятия, именуемые отрицательными, многие авторы наделяют чертами, противоречащими определению понятия вообще. Если в общем определении указывается, что всякое понятие отражает признаки предметов, то об отрицательном понятии говорят, будто в нем мыслится признак, который не присущ предмету, а иногда даже сводят все содержание понятия к фиксации отсутствия каких бы то ни было признаков у предмета. В этой связи утверждают, что в отрицательных понятиях происходит обобщение по отсутствию признаков. Но понятие, в котором мыслится лишь отсутствие признаков предмета, невозможно.

Примером отрицательных понятий обычно служат такие понятия, как «не-человек», «не-млекопитающее». Но если внимательно проанализировать эти выражения, то можно прийти к выводу, что в них мыслится определенное содержание, видовой признак которого выражен не непосредственно, а через отличие его от видового признака содержания другого понятия.

Для пояснения сказанного обратимся к понятию «не-млекопитающее». Его содержание неопределенно. Еще Аристотель говорил в «Истолковании», что каждое отдельное выражение такого вида следует называть неопределенным именем. Но при оперировании такими выражениями мыслится какой-либо признак понятия, тождественный родовому признаку (либо отдаленного, либо ближайшего рода) понятия, обозначаемому словом «млекопитающее». Если, например, ведется рассуждение о позвоночных животных, то в этих рамках выражение «не-млекопитающее» равнозначно выражению «позвоночное животное, которое не является млекопитающим». А в содержании последнего выражения, несомненно, мыслится признак «быть позвоночным», как и в понятии «млекопитающее», тождественном выражению «позвоночное животное, которое является млекопитающим».

На этом примере видно, что в понятиях, которые принято называть отрицательными, мыслится не отрицание признаков соотносительного положительного понятия, а только отличие видового признака первого от видового признака второго при наличии одного и того же родового признака у обоих понятий.

Учитывая это, мы можем положительные понятия обозначить символом $Aавс$, а отрицательные — символом $A\overline{авс}x$, где верхняя черта означает отрицание видового отличия $авс$, а x — неопределенное видовое отличие.

Вся классификация рассмотренных видов понятий может быть представлена в виде схемы, которая охватывает не все

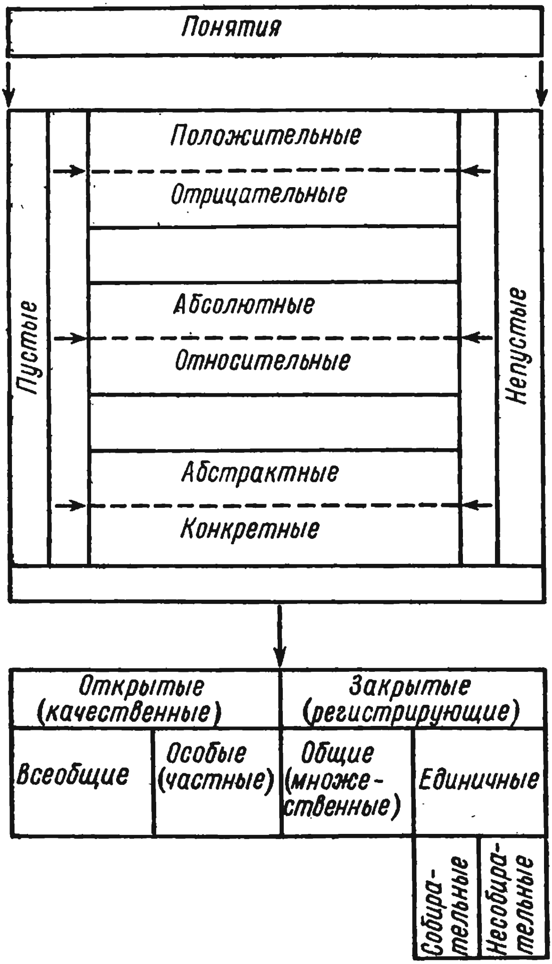


Рис. 1

виды понятий, а только основные и наиболее разработанные из них (рис. 1).

§ 12. Формально-логические отношения между понятиями по содержанию и по объему

По содержанию с логической точки зрения любые два понятия отличаются друг от друга. Различие между ними может быть, во-первых, таким, что в них совершенно отсутствуют общие признаки, кроме принадлежности отражаемых данными понятиями предметов к материальным или идеальным явлениям; во-вторых, таким, что они имеют один или более общих признаков. В первом случае понятия будут называться *абсолютно различными*, а во втором — *относительно различными*.

Относительно различные понятия делятся на: а) *зависимые* — в этом случае одно понятие является главной частью другого, т.е. одно понятие является родом, а другое — видом (пример: понятия «растение» и «дерево»); б) *однородные*, т.е. такие два понятия, у которых общей является главная часть (пример: «однолетнее растение» и «многолетнее растение»); в) *сходные*, т.е. такие, у которых общей является неглавная (побочная) часть содержания (пример: «каменный дом», «каменный памятник»).

Различающиеся по содержанию понятия бывают либо *соединимыми*, либо *несоединимыми*. К соединимым понятиям относятся: а) такие, из которых одно является частью содержания другого (пример: понятия «часы» и «золотые часы»); б) такие, что оба они входят в содержание третьего понятия (пример: понятия «металлический» и «желтый»).

Несоединяемость, в свою очередь, бывает трех видов: а) *контрадикторная, или противоречащая*; в случае этой несоединимости в одном понятии мыслится отсутствие признака, который имеется в другом понятии, символически их можно обозначить, как *А* и *не-А* (примеры: «человек» и «не-человек», «белый» и «не-белый»). Особенность контрадикторной несоединимости заключается в том, что с отрицанием одного из контрадикторных понятий соединяется полагание другого, а с полаганием одного — отрицание другого, содержание одного из них обязательно присуще любому предмету в области той категории предметов, к которой они относятся; б) *противоположная несоединимость*. В этом случае полагание одного понятия связано с отрицанием другого, но отрицание одного из них не соединяется с полаганием другого; отношение противоположности есть отношение между такими двумя понятиями, полагание которых невозможно без полагания понятий, отличных от них, например полагание понятий *наибольший* и *наименьший* логически невозможно без мысли о том, что есть предметы однородные по качеству с наибольшим и наименьшим предметами, но отличные от них по величине. Символически это отношение можно представить как первый и последний члены ряда $Ax, Ax', Ax'' \ldots Ax^n$, где $x', x'' \ldots x^n$ — несовместимые определения A, а между x и x^n — крайняя степень различия; в) *внеположная несоединимость* — отношение между такими понятиями, у которых родовой признак общий, а видовые признаки разные, как, например, в понятиях «тюльпан» и «роза». Символически это различие между понятиями можно представить, как *Авс* и *Ade*. Ясно, что отношение внеположности представляет собой такую несоединимость, которая логически не исключает и не предполагает понятий с иными видовыми признаками. Этой особенностью данное отношение отличается от отношения контрадикторности и отношения контрарности.

Два совершенно различных по содержанию понятия A и B являются такими, что одно из них не подразумевает и не исключает другого. Они называются *несравнимыми*, или *диспаратными*, потому что сравнение их не ведет ни к какому определенному результату. Оба диспаратных понятия могут входить в содержание какого-либо третьего понятия C, т. е. являются *совместимыми*. Например, понятия «двуногий» и «разумный» являются признаками понятия «человек». Символически это отношение можно представить, как $C=ABx$, где x обозначает признаки, отличные от признаков понятий A и B.

Понятно, что отношение совместимости между диспаратными понятиями является *синтетическим*, в то время как отношения между понятиями противоречащими, противоположными и внеположными — *аналитическими*.

Конечно, перечисленные отношения между понятиями по содержанию не могут существовать без соответствующих отношений по объему, каковыми являются отношения совпадения (тождества), включения, исключения и пересечения.

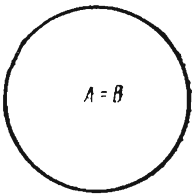


Рис. 2

Отношения понятий по объему легко определить, если представить объемы понятий в виде кругов. В таком случае каждое из отношений будет выглядеть следующим образом.

1. *Совпадение объемов.*

В этом случае объем одного понятия равен объему другого. Такие понятия называются взаимозаменяемыми (рис. 2). Примеры: «разумное существо» и «существо, способное производить орудия труда»; «прямоугольник с равными сторонами» и «квадрат».

2. *Включение объемов.*

В этом случае объем понятия B включен в объем понятия A.

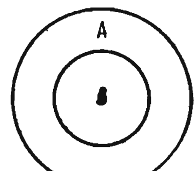


Рис. 3

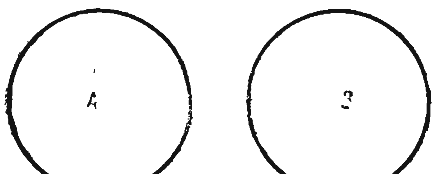


Рис. 4

Понятие A является подчиняющим, а понятие B — подчиненным (рис. 3). Пример: «позвоночное» и «млекопитающее».

3. *Исключение объемов.*

В этом случае нет ни одного понятия, которое находилось бы в обоих объемах (рис. 4). Пример: «капиталист» и «рабочий».

4. *Пересечение объемов.*

В этом случае существует группа понятий, общая для обоих объемов, за пределами которой имеются еще группы понятий, одна из которых принадлежит объему понятия A, а другая — объему понятия B (рис. 5). Примеры: «рабочий» и «Герой Социалистического Труда», «адвокат» и «спортсмен».

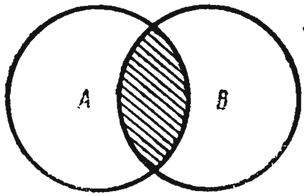


Рис. 5

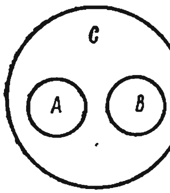


Рис. 6

Особым отношением является *отношение соподчинения*, заключающееся в том, что два исключающих друг друга понятия находятся оба в объеме третьего (рис. 6). Примеры: «материалистический взгляд на мир» и «идеалистический взгляд на мир» являются понятиями, соподчиненными понятию «философские взгляды»; «рабы», «крепостные крестьяне» и «наемные рабочие при капитализме» являются понятиями, соподчиненными понятию «эксплуатируемые классы».

§ 13. Обобщение и ограничение понятий

Как уже было сказано, во всяком сложном понятии содержание состоит из одной главной части и из одной или многих частей, которые были названы побочными. Например, в понятии «тело, образованное вращением круга вокруг одного из своих диаметров» главной частью является «тело», а побочной — «образованное вращением круга вокруг одного из своих диаметров» ($N — Ax$).

Если удалить из содержания понятия побочную часть, то ее логическая связь с главной частью будет устранена. В результате получатся два понятия: *абстрактное* понятие x, т. е. то, которое отвлечено, и *конкретное* понятие A — то, от которого отвлечено другое. По отношению к самим выделяемым признакам удаление последних из содержания сложного понятия называется *отвлечением, или абстрагированием*, а по отношению к оставшейся части понятия — *обобщением*. Оставшаяся часть после отвлечения от понятия каких-либо признаков представляет собой *конкретное понятие*. При последовательном отвлечении от понятия Abc одного за другим признаков каждый раз соответственно будет осуществляться переход ко все более общим понятиям Abc, Ab, A.

Так, отвлекая от понятия «человек» признаки «быть способным к ощущениям», «быть одушевленным», мы получим соответственно понятия «животное», «организм».

Пределом обобщения понятий являются философские категории — «сознание», «материя», «возможность», «действительность» и др. В рамках одной науки пределом обобщения являются категории этой науки. Логической операцией, противоположной обобщению, является *ограничение*. Если отвлечение в качестве следствия имеет уменьшение содержания понятия, то ограничение снова вводит в содержание понятия те признаки, которые были отняты у него в результате отвлечения. От общего понятия A через ограничение мы переходим постепенно к понятиям Ab, Abc, $Abcd$ и т. д. От понятия «плоская геометрическая фигура» путем прибавления соответствующих признаков мы переходим к понятиям «четырехсторонняя фигура», «параллелограмм», «квадрат».

Пределом ограничения являются понятия об отдельных предметах, индивидуумах, содержание которых уже не может быть увеличено путем прибавления каких-либо признаков.

Ограничение и обобщение не являются механическими процессами, допускающими произвольное соединение разнородных признаков и произвольное их разъединение. Напротив, оба данных логических действия тесно связаны со структурой понятия. Поэтому, например, выражения: (1) «число, оканчивающееся на 5 или на 0»; (2) «число, оканчивающееся на 5» нельзя рассматривать как обозначение двух понятий, из которых первое является обобщением второго. В действительности в выражении (1) союзом «или» соединены два понятия. Понятие обобщения не существует без отвлечения, уменьшения содержания исходного понятия. Понятие же ограничения предполагает увеличение содержания понятия. Оба эти противоположных друг другу логических действия осуществляются двумя способами. Так, ограничение понятий может быть осуществлено: 1) путем подстановки вместо видового признака понятия его видоизменения, например, в понятие «человек, знающий европейский язык» вместо признака «знающий европейский язык» подставляется признак «знающий живой европейский язык»; 2) путем присоединения к содержанию понятия признака, который является видовым в соподчиненном понятии, например к содержанию понятия «люди, знающие все живые европейские языки» присоединяется признак «знающие все мертвые европейские языки».

Символически ограничение понятия первым способом может быть представлено так:

$$\frac{Ax}{Aa},$$

где Ax — исходное понятие, A — родовые признаки его, x — видовое отличие, Aa — понятие, полученное из исходного в результате его ограничения, a — признак, вызывающий видоизменение видового отличия.

Символически ограничение понятия вторым способом может быть представлено следующим образом:

$$\frac{Aa}{A(a \wedge b)},$$

где символы Aa, A имеют те же значения, которые указаны для первого случая, $\wedge$ — знак конъюнкции, a и b — признаки, каждый из которых в сочетании с родовыми признаками выделяет особый вид (класс) предметов.

На схемы способов ограничения понятий можно смотреть и как на схемы способов обобщения понятий, если считать, что символические выражения под горизонтальной чертой — Aa, $A(a \wedge b)$ — обозначают исходные понятия, а символические выражения над чертой — Ax, Aa — обозначают понятия, которые получаются в результате обобщения исходных понятий.

Чем отличается один способ обобщения от другого? Тем, что в одном случае видовой признак исходного понятия при переходе к более общему понятию заменяется обобщенным его выражением (признак a заменяется признаком x, признак «живой европейский язык» — признаком «европейский язык»), а во втором случае — отбрасывается один из видовых признаков: вместо признаков a и b остается лишь один признак a или один признак b; вместо конъюнкции признаков «знающий все живые и мертвые европейские языки» остается лишь либо один признак «знающий все живые европейские языки», либо признак «знающий все мертвые европейские языки».

Во избежание недоразумений заметим, что с логической точки зрения, например, понятие «натуральное число» является обобщением понятия «четное натуральное число», а следовательно, объем последнего меньше объема первого. Хотя в математике говорят, что каждому элементу множества натуральных чисел может быть сопоставлен элемент множества четных натуральных чисел, это обстоятельство не является противоречием сказанному о соотношении объемов понятий «натуральное число» и «четное натуральное число», так как с логической точки зрения объемы понятий одинаковы лишь в том случае, если не только число индивидуумов в объеме одного понятия то же самое, что и в объеме другого, но если и с качественной стороны эти индивидуумы неразличимы.

Когда же элементы четных натуральных чисел сопоставляются с элементами множества натуральных чисел вообще, то только часть четных чисел первого множества будет содержаться во втором множестве. Поэтому с качественной стороны не все элементы первого множества тождественны элементам второго множества. Элементы первого и второго множеств в данном случае несопоставимы как объемы двух понятий, подобно этому нельзя решать вопрос, являются ли объемы понятий «пальцы человеческой руки» и «пальцы человеческой ноги» равными или неравными.

Глава II

СУЖДЕНИЕ

§ 14. Сущность суждения и его строение

Отдельными, изолированными понятиями люди никогда не мыслят. Наиболее простой, элементарной логической формой мыслительного процесса является суждение. Логическая форма суждения выражает отношения между двумя и более понятиями. Устанавливая определенные отношения между понятиями в форме суждения, мы тем самым осуществляем элементарный мыслительный акт.

Сущность логической формы суждения можно кратко выразить в следующем определении: суждение — это форма мышления, в которой отражаются отношения между предметами и их признаками посредством утверждения или отрицания.[10] Из этого определения уже видно, что суждение как форма мышления существенно отличается от понятия. Это связано с тем, что данные логические формы по-разному отражают окружающую людей действительность. Если понятия отражают совокупность существенных признаков предмета, то суждения отражают отдельные отношения между предметами и их признаками. Причем эти отношения между предметами и их признаками, как выше было сказано, отражаются посредством утверждения или отрицания. В таком случае суждение придает человеческой мысли законченную форму, где может быть непосредственно выражена истинность или ложность нашего высказывания. Такая структура суждения и его познавательная функция не могут быть полностью выражены в языке с помощью лишь слова или группы слов, как это происходит с понятием.

Суждение как форма мышления в языке закрепляется и передается другим людям с помощью предложения. Например, слово «Ленинград» выражает понятие, а если высказывается предложение — «Ленинград — город-герой», то в этом предложении уже выражается мысль в форме логического суждения.

Если мы будем рассматривать различные по своему содержанию суждения, то можно заметить, что у самых различных по конкретному содержанию суждений имеется общая структура, т. е. они одинаково построены по форме.

---

[10] Примерно такое определение суждения давал еще Аристотель. Так, в одной из своих работ, характеризуя суждение, он писал, что оно «есть высказывание, утверждающее или отрицающее что-нибудь о чем-нибудь» (Аристотель. Аналитики. М., 1952, с. 9).

Для примера возьмем следующие три суждения: 1) «Народы СССР борются за прочный мир», 2) «Птицы — теплокровные животные», 3) «Студенты обязаны сдавать экзамены». Все эти высказывания по своему конкретному содержанию выражают различные суждения. Но как бы они ни были различны по своему содержанию, они имеют совершенно одинаковую структуру, ибо в каждом суждении о чем-то что-то утверждается. В первом суждении утверждается о народах СССР, что они борются за мир; во втором суждении утверждается о птицах, что они являются теплокровными животными; в третьем суждении говорится о студентах, что они обязаны сдавать экзамены. В этой структуре имеются три части, или три элемента. Первый элемент суждения называется *субъектом* суждения. Субъект суждения выражает знания о предмете суждения, т. е. то, о чем говорится в данном суждении. Сокращенно субъект суждения обозначается буквой S (от латинского слова *subjectum)*.

В приведенных выше примерах субъектом суждения являются: в первом случае — «народы СССР», во втором — «птицы», в третьем — «студенты». При этом необходимо отличать *субъект* суждения как логический элемент от *предмета* (объекта) суждения, т. е. от того, что в реальной действительности познается с помощью суждения. Познаваемый в действительности предмет всегда безгранично богаче, чем то или иное знание о нем, выраженное субъектом суждения. Предмет суждения отличается от субъекта суждения так же, как мысль о предмете от самого предмета.

Вторым логическим элементом суждения является *предикат* суждения. Предикат суждения выражает знания о признаке предмета суждения, т. е. то, что говорится о субъекте суждения. Сокращенно предикат суждения обозначается буквой P (от латинского слова *praedicatum*). Предикат суждения является вторым необходимым элементом суждения.

Третьим элементом суждения является *связка.* Связка выражает отношение, которое устанавливается в суждении между субъектом и предикатом. Благодаря такому расчлененному отношению, которое устанавливается с помощью логической связки между двумя основными элементами, создается возможность не механически (как это имеет место в ассоциативных связках), а сознательно устанавливать связь между субъектом и предикатом. Это придает органическое единство и законченность всей форме суждения.

Логическая связка, устанавливающая отношение между субъектом и предикатом, имеет две формы. Она может быть либо утвердительной, либо отрицательной—в зависимости от того, приписывается предикат субъекту или нет.

В русском языке связка, как правило, не высказывается, а лишь подразумевается. Когда мы говорим: «Птицы —

теплокровные животные», то здесь понятие «птицы» является субъектом суждения, понятие «теплокровные животные» — предикатом, а тире выражает связку. Утвердительная связка здесь подразумевается. В тех же случаях, когда в русском языке связка высказывается, то она в утвердительной форме выражается с помощью слов: «есть», «суть», «имеется» и т. п. Если же связка высказывается в отрицательной форме, то нужно говорить: «не есть», «не суть», «не имеется», «не является» и т. п. Примером суждения с отрицательной формой связки, которая явно выражена в языке, может служить: «Птицы не являются млекопитающими животными». В этом примере в языке явно выражены все три элемента суждения.

Обращая внимание на эту особенность простейшей структуры человеческой мысли, И. М. Сеченов писал: «У всех народов всех веков, всех племен и всех ступеней умственного развития словесный образ мысли в наипростейшем виде сводится на наше трехчленное предложение. Благодаря именно этому мы одинаково легко понимаем мысль древнего человека, оставленную в письменных памятниках, мысль дикаря и мысль современника».[11]

Таким образом, структура простого категорического суждения, которое всегда состоит из трех элементов, может быть выражена в виде общей формулы: $S — P$, где тире обозначает связку. Другие два элемента (S и P), являясь основными частями суждения, несут смысловую нагрузку. В логике они называются еще переменными, так как могут выражать различное конкретное содержание. Связка в простом категорическом суждении не является переменной частью суждения, она выражает только утвердительное или отрицательное отношение между субъектом и предикатом и может быть названа постоянным элементом суждения.

Чем можно объяснить, что простая форма суждения, обладающая устойчивой структурой, всегда состоит из трех частей? На этот вопрос философы давали и сейчас дают разные ответы. Некоторые философы-идеалисты считают, что это дано человеку от рождения или что это предопределено чем-то свыше (абсолютным духом, богом и т. п.). Особенностью подобных идеалистических взглядов на природу суждения является то, что они рассматривают его как некую «чистую» форму человеческого мышления, независимую от внешнего материального мира. Считая, что суждение связывает только элементы мысли (понятия), они не признают того факта, что источником суждений являются связи и отношения, которые существуют между предметами и их свойствами в самом окружающем объективном мире. В действительности же субъектно-предикатная

---

[11] Сеченов И. М. Избранные философские и психологические произведения. М., 1947, с. 376.

форма суждения приспособлена к своей основной познавательной функции — к функции отражения объективной реальности.

Марксистско-ленинская философия, исходя из материалистического объяснения как природы человека, так и его духовных способностей, считает, что логическая структура суждения также обусловлена объективными обстоятельствами. Объективным основанием трехчленной структуры суждения служит окружающий человека материальный мир. Дело в том, что все окружающие человека предметы (явления, события) либо обладают, либо не обладают определенными свойствами (чертами, качествами). Где бы ни жил человек в процессе своей практической деятельности, сталкиваясь с отдельными предметами окружающего мира, он неизбежно может познавать их лишь через те или иные свойства, которыми обладает или не обладает познаваемый предмет.

Таким путем о познаваемом предмете вырабатывается субъект суждения, отдельные же свойства познаваемого предмета фиксируются предикатом суждения, а отношения, которые устанавливаются между реальными предметами и их свойствами, отражаются в логической связке суждения. Этим можно правильно объяснить тот факт, почему у всех людей способ связи простейших элементов человеческого знания фиксируется с помощью трехчленной структуры суждения.

Несколько своеобразно проявляется трехчленная структура простых суждений в так называемых суждениях существования и в суждениях отношений.

Обычно *суждениями существования* называются такие, которые в своем конкретном содержании выражают сам факт существования или несуществования отражаемого в мысли предмета. Суждения существования по форме делятся на утвердительные и отрицательные. В утвердительных суждениях устанавливается наличие, существование предмета. Примеры: «Капиталисты существуют», «Существуют роботы, управляемые по телевидению», «Атомные электростанции существуют» и т. д. В отрицательных суждениях указывается на отсутствие предмета. Примеры: «Снежный человек не существует», «Не существует вечный двигатель», «Бога нет» и т. д.

В обычных суждениях существование реальных предметов подразумевается, но в языке в явной форме не высказывается. Особенностью же суждений существования является то, что в них предикатом является понятие существования, которое высказывается о предметах (материальных или идеальных), обозначаемых субъектом суждения. Связка (утвердительная или отрицательная) в этих суждениях чаще всего не высказывается в языке, она лишь подразумевается. В предложении «Мысль без языка не может существовать» обнаруживаются следующие части суждения: субъектом будет «мысль без языка», а отрицательная связка вычленяет предикат «может существовать».

Специфической же особенностью *суждений отношений* является то, что в их трехчленной структуре роль предиката, выражающего отношение между двумя другими элементами суждения, выполняет третье понятие, которое имеет также определенное смысловое значение. Например: «Иван брат Петра», «Город Хорог расположен выше Еревана», «Байкал глубже Аральского моря» и т. д. Такие суждения имеют общую структуру, которую можно выразить в виде следующей формулы: «a R b», где «a» и «b» выражают понятия, обозначающие основные элементы суждения, а символ R обозначает определенное содержательное отношение между мыслимыми в суждении предметами мысли.

В суждениях, где третьим элементом является определенное смысловое понятие, выполняющее роль связки, могут устанавливаться самые различные отношения между двумя другими предметами мысли. В таких суждениях отношения между предметами мысли могут быть самыми различными по времени, месту, величине, родству, причинной зависимости и т. д.

Дальнейший анализ сущности суждения и его строения связан уже с более подробным разбором вопроса о взаимосвязи суждения и предложения.

§ 15. Суждение и предложение

Философия марксизма-ленинизма исходит из того факта, что язык и мышление в реальной действительности у людей органически связаны между собой. Аналогично обстоит дело и с логической формой суждения, и с грамматическим предложением.

Образование и развитие логического суждения невозможны без грамматической формы предложения. Поэтому, когда мы высказываем то или иное суждение, то мы вынуждены выражать его в языке с помощью какого-то предложения. Даже в тех случаях, когда мы мыслим про себя (не выражая мысль ни в устной, ни в письменной речи), то и тогда мы пользуемся скрытой, так называемой внутренней речью.

Предложение по отношению к суждению является его своеобразной материальной оболочкой, а суждение составляет идеальную, смысловую сторону предложения. Результат становления, образования суждения закрепляется в языке с помощью предложения. Благодаря предложению люди передают друг другу те или иные суждения. Если же мы не можем выразить суждение в предложении, то можно считать, что у нас еще не сформировалось новое суждение.

Однако не только суждение нуждается в своей языковой форме предложения, но и предложение только тогда считается оформленным в самостоятельную языковую единицу, когда эта единица передает законченную мысль. Имеется много различных определений, указывающих на то, что́ нужно понимать под термином «предложение». Но начиная с древних времен и до наших дней в таких определениях подчеркивается специфический признак предложения — это такая единица речи, в которой выражается законченная мысль. Но тесная связь суждения и предложения не означает, что они тождественны между собой. Суждение как логическая форма мышления отлична от предложения, которое является его языковой оболочкой.

Во-первых, суждение отличается от предложения тем, что, являясь категорией мышления, оно характеризует идеальную, смысловую сторону предложения, отражающую действительность. Предложение же, являясь категорией языка и выступая материальной оболочкой суждения, не только фиксирует через суждения знания о действительности, но и выражает отношение говорящего к этой действительности. То есть предложения могут выражать чувства, эмоции и различные волевые переживания тех, кто высказывает суждения.

Во-вторых, одно и то же суждение можно выразить в различных грамматических формах, т. е. с помощью различных предложений, например, на различных национальных языках мира или по-разному выражая смысл суждения на одном каком-нибудь национальном языке. Так, в русском языке один и тот же смысл суждения можно передать в следующих двух предложениях: «Наша группа заняла первое место на олимпиаде», «Первое место на олимпиаде досталось нашей группе».

В-третьих, по своей структуре суждение также отличается от предложения. Как было показано в § 14, простое суждение всегда состоит из трех частей: субъекта, предиката и связки между ними. В отличие от суждения предложение не имеет строгого ограничения в количестве составляющих его частей. С одной стороны, в русском языке предложение может иметь, кроме главных членов (подлежащего и сказуемого), еще целый ряд второстепенных членов предложения. Так обстоит дело, например, в предложении «Волга является самой большой рекой в европейской части СССР». С точки зрения логической формы высказанное здесь суждение имеет только три части: то, о чем говорится в суждении, — «Волга» (субъект суждения), то, что говорится о субъекте суждения, — «самая большая река в европейской части СССР» (предикат суждения) и утвердительную связку — она выражена словом «является».

С другой стороны, предложение может состоять лишь из одного слова. Так, например, в русском языке мы имеем дело с односоставными предложениями — безличными и назывными. В частности, в таких безличных предложениях, как «Светает», «Вечереет», «Моросит», «Темнеет» и т. д., суждение выражено одним словом. Если рассматривать в подобных односоставных предложениях смысловую сторону, то и здесь структура суждения имеет все три части. Например, в односоставных предложениях «Светает», «Вечереет» высказывается законченная мысль, ибо мы утверждаем, что в данный момент наступает такое-то время суток. Поэтому такие высказывания могут быть как истинными, так и ложными. (Если то, что утверждается в односоставных предложениях соответствует действительности, то оно является истинным, а если не соответствует действительности, то оно является ложным.)

Наконец, структура суждения может не соответствовать грамматическому предложению даже в тех случаях, когда основные члены предложения (подлежащее и сказуемое) совпадают по своему значению с основными частями суждения (субъектом и предикатом). Например, в таких предложениях, как «Капитализм загнивает», «Стол сломан», «Лампочка горит» и т. д. В таких случаях, как правило, в русском языке третья часть суждения — связка — не высказывается, а только подразумевается.

§ 16. Суждение и вопрос

То или иное суждение можно рассматривать как ответ на определенный вопрос, а сам вопрос — как требование отыскать ответ, представляющий собой истинное суждение. Однако вопрос как требование найти его истинные ответы можно понимать по-разному. Вопрос имеет сильную форму, если требуется найти все его истинные ответы. Вопрос в сильной форме характеризуется максимальной полнотой требования. Вопрос, в котором требуется найти один или несколько, но не все его истинные ответы, называется слабой формой вопроса.[12] В слабой форме вопрос не содержит в себе максимальной полноты требования. Следует отметить, что вопросы всегда характеризуются сильной формой, если они имеют единственный истинный ответ, исчерпывающий всю полноту их требования.

Примером вопроса в слабой форме может быть следующее вопросительное предложение: «Какой по крайней мере один советский фильм был отмечен международной премией?». В сильной форме это вопросительное предложение можно сформулировать таким образом: «Как называются все те советские фильмы, которые были отмечены когда-либо международными премиями?».

---

[12] Характеристике вопросов, выделяющей сильную и слабую форму их, родственно известное понимание задачи в строгом и менее строгом смысле, когда требуется найти все или хотя бы одно ее решение, соответственно.

Нетрудно найти примеры таких вопросов, которые даже в своей слабой форме не имеют ни одного истинного положительного ответа. Например, истинным ответом на вопрос: «Кто был сыном Коперника?» может быть лишь отрицание любого его положительного ответа. Как правило, у вопросов подобного рода ложной является одна из их предпосылок.

Любой вопрос имеет как позитивную, так и негативную предпосылку. Утверждение, что по крайней мере один ответ на вопрос является истинным суждением, называется позитивной предпосылкой вопроса. Утверждение, что по крайней мере один ответ на вопрос не является истинным суждением, называется негативной предпосылкой вопроса.

Логическая структура суждений, выражающих предпосылки вопроса, подчеркивает специфику того типа, к которому данный вопрос относится. Обычно различают два типа вопросов. Вопросы первого типа в русском языке выражаются предложениями с вопросительной частицей «ли» или просто имеющими знак вопроса, который относится ко всему предложению, например: «Верно ли, что Колумб открыл Америку?». К вопросам второго типа относятся предложения, начинающиеся с вопросительных слов «кто», «что», «где», «когда», «почему» и т. д. Примером вопроса второго типа будет следующее вопросительное предложение: «Кто открыл Америку?». В отличие от вопросов первого типа вопросы второго типа имеют лишь фрагмент осмысленного предложения.

Если имеет место вопрос первого типа, то его позитивная предпосылка логически эквивалентна дизъюнкции всех его простых ответов, тогда как его негативная предпосылка представляет собой дизъюнкцию отрицаний всех его простых ответов. Что же касается вопросов второго типа, то как позитивные, так и негативные его предпосылки представляют собой экзистенциальные высказывания. Например, вопрос «Кто открыл Америку?» в качестве своей позитивной предпосылки имеет предложение: «Кто-то открыл Америку»; его негативной предпосылкой является предложение: «Кто-то не открыл Америку».

Предпосылки вопросов первого типа, имеющие характер дизъюнкций, как бы указывают, что в этих вопросах из двух возможных простых ответов требуется выбрать единственный истинный ответ; другими словами, в них требуется выяснить, какой ответ (положительный или отрицательный) является истинным суждением.

Предпосылки вопросов второго типа, имеющие структуру экзистенциальных высказываний, выражают особенность этих вопросов, состоящую в том, что для получения возможных ответов в них требуется (соответствующий им) фрагмент осмысленного предложения дополнить новыми сведениями.

Предпосылки вопросов в известной мере определяются правильностью их постановки. Для правильной постановки вопросов первого типа требуется, чтобы позитивные и негативные предпосылки их были логически истинными предложениями. При ложной позитивной предпосылке в классе возможных ответов на вопрос не содержится ни одного действительного ответа. В этом случае нарушается известный в традиционной логике закон исключенного третьего. В случае ложной негативной предпосылки не выполняется закон противоречия, что лишает вопрос всякого смысла. Например, вопрос «Бросил ли Иванов курить?» имеет ложные предпосылки (позитивную и негативную) в том случае, если Иванов никогда не курил; данный вопрос не имеет ни одного действительного ответа и является неправильно поставленным вопросом.

Позитивные и негативные предпосылки вопросов второго типа не являются логическими тавтологиями, но для правильной постановки их также требуется истинность их предпосылок. В случае ложной позитивной предпосылки эти вопросы в классе своих возможных элементарных ответов не имеют ни одного действительного ответа. Отрицание любого элементарного ответа на такого рода вопрос будет его действительным ответом, но всего лишь частичным. При ложной негативной предпосылке любой возможный элементарный ответ на вопрос второго типа будет в то же время его действительным ответом; вопрос в этом случае является излишним, так как его требование не имеет познавательного значения.

Пример: вопрос «Кто из людей был на Марсе?» имеет ложную позитивную предпосылку («Кто-то из людей был на Марсе»), но истинную негативную предпосылку («Кто-то из людей не был на Марсе»). Действительным ответом на этот вопрос является отрицание любого возможного элементарного ответа, которое будет логическим следствием негативного исчерпывающего ответа, выражаемого предложением «Никто из людей не был на Марсе». Вопрос: «В каком море вода соленая?» имеет истинную позитивную предпосылку («В каком-то море вода соленая») и ложную негативную предпосылку («В каком-то море вода несоленая»). Любой возможный элементарный ответ на данный вопрос является одновременно его действительным ответом. Решение этого вопроса представляется тривиальным.

Одно лишь требование истинности предпосылок не является исчерпывающим для правильной постановки вопросов. В некоторых случаях вопрос может быть правильно поставленным даже в тех случаях, когда либо позитивная, либо негативная его предпосылка оказывается ложной. Допустим, на уроке учитель спрашивает учеников: «Кто выполнил домашнее задание?». Он может получить такой ответ: «Все выполнили домашнее задание» или другой ответ: «Никто не выполнил домашнее задание». При ложной негативной предпосылке истинным является первый ответ, при ложной позитивной предпосылке истинным оказывается второй ответ. В каждом из указанных случаев этот вопрос не является неправильно поставленным. При постановке вопросов более или менее точно указывается область поиска его возможных ответов самой формулировкой вопроса. Точность указания этой области определяется тем, насколько корректно с логической точки зрения сформулирован вопрос. Однако постановка вопроса не исчерпывается одним лишь формулированием вопроса. Она предполагает также наличие определенных критериев, которым должны удовлетворять действительные ответы. В соответствии с этими критериями из множества возможных ответов выбираются те и только те, которые являются истинными ответами на данный вопрос. Следовательно, постановка вопроса включает в себя и определение критериев обоснования ответов. Правильно поставленный вопрос означает, что он корректно сформулирован с логической точки зрения и что по крайней мере один какой-либо возможный ответ на этот вопрос может быть обоснован надлежащим образом как ответ истинный. Требование надлежащей формулировки вопроса является требованием логического порядка; требование наличия обоснованных ответов является требованием методологического порядка.

При формулировании вопросов могут иметь место следующие логические ошибки. Во-первых, выражение вопроса может не соответствовать синтаксическим и семантическим правилам того языка, в котором этот вопрос сформулирован. Например, в квантовой механике некорректно сформулированным является вопрос: «Какое точно определенное положение занимает электрон в атоме в данный момент времени?». Во-вторых, формулировка вопроса может быть неточной, неясной или многозначной ввиду того, что в вопросе встречаются неопределенные термины, неточные или случайные слова, например: «При каком количестве волос на голове можно говорить о человеке, что он является лысым?». В-третьих, корректная формулировка вопроса означает, что все его составные элементы точно указаны. Поэтому некорректно сформулированными являются вопросы типа «Кто есть кто?». Не являются с логической точки зрения корректными и так называемые риторические вопросы, не содержащие в себе требование ответа, например: «Кто же из нас не знает, что Ленинград — красивейший город?».[13]

[13] В риторических вопросах по существу иет места неопределенности; они имеют смысл в качестве категорических суждений.

В системе научных знаний выражением любой задачи может быть форма условного вопроса. В правильной формулировке его выполняется требование полноты, т. е. в формулировке ясно указано, что дано, в чем состоит условие, что представляет собой неизвестное. В формулировках условных вопросов (или задач) условие выполняет функцию организации данных, требуемых для решения вопроса, связывает неизвестные с тем, что дано и выполняет селективную функцию, имея в себе указание относительно того, какое решение вопроса следует считать приемлемым. Поэтому корректное выражение задачи в форме условного вопроса предполагает, что условие ее является достаточным, но не излишним и что оно не является противоречивым. Излишнее условие содержит, например, вопрос: «Является ли x двузначным числом, если x^2 и $10x$ — трехзначные числа?». Любое в отдельности сведение, содержащееся в условии этого вопроса, является вполне достаточным; взятые совместно, они осложняют поиск действительного ответа. Если же условие вопроса составлено так, что оно является противоречивым, то данный вопрос вообще не имеет действительного ответа, например: «Правду ли говорит Сократ, если он утверждает, что все афиняне лгуны?».

В различных научных дисциплииах вопросы всегда ставятся на основе и в рамках тех или иных знаний. Истинность этих знаний составляет важнейшее условие для правильной постановки вопросов. Предполагаемая вопросом программа исследования должна быть направлена на изучение реальных объектов, что исключает априоризм в постановке и решении научных вопросов, подмену научного исследования спекулятивными рассуждениями. Спекулятивные вопросы оторваны, как правило, от реальной практики и научного познания. В силу своей направленности на несуществующие «предельные» основания объективного мира и человеческого познания ни один ответ на спекулятивный (или метафизический) вопрос не может быть обоснован надлежащим образом в качестве истинного ответа.

Выдвижение спекулятивных вопросов в той или иной сфере знания тесно связано с априоризмом в познании, с абстрактной постановкой вопросов, исключающей конкретное соотнесение вопросов с соответствующими реальными фактами. Спекулятивные, априорные и абстрактные вопросы нарушают методологический принцип конкретного изучения истины.

В отличие от этих категорий вопросов правильно поставленные вопросы содержат в себе реальные требования поиска истинных ответов. В правильно поставленных вопросах (с методологической точки зрения) выполнимость содержащихся в них требований обеспечивается тем, что все допущения, понятия и программы исследования, предполагаемые этими вопросами, обоснованы надлежащим образом в некоторой системе научных знаний. Вопросы, реальность содержания которых не обоснована, нередко оказываются вопросами, не имеющими смысла.

Для правильной постановки вопросов в научном познании мировоззренческая основа и методологические критерии имеют более важное значение, чем чисто логические критерии. Надежной мировоззренческой и методологической основой научного мышления является философия диалектического материализма. Не подменяя особые принципы и критерии правильной постановки вопросов в специальных научных дисциплинах, она в каждой из них выявляет общие принципы плодотворного исследования.

В научном познании вопросы возникают из результатов предшествующего знания и на основе знания о том, что требуется изучить в сфере еще не познанного. В содержании вопроса указывается граница между тем, что известно, и тем, что пока еще неизвестно. Это содержание имеет познавательное значение, в силу которого неправомерно отрицать возможность для вопросов быть формой выражения истины. Однако специфические способы получения содержания, составляющего смысл вопроса, и специфическая его логическая структура требуют особого определения терминов «истинно» и «ложно», пригодных для вопроса. При рассмотрении значений истинности вопросов наиболее важным оказывается понятие правильно поставленных вопросов. Другими словами, проблема логического значения вопросов должна рассматриваться в тесной связи с проблемой логических и методологических критериев правильной постановки вопросов.

Вопрос как форма мысли является сложным структурным образованием. Он содержит в себе характеристики, присущие суждениям, командам и пропозициональным формам. Наличие общих свойств, присущих вопросам и суждениям, открывает возможность для построения таких логических исчислений вопросов, в которых вопросы отождествляются с суждениями, выражающими их предпосылки или класс их возможных ответов. В этих исчислениях возможным оказывается исследование информационных характеристик вопросов и применение аппарата логической теории суждения для анализа вопросов. Наличие свойств, объединяющих вопросы с командами, позволяет рассматривать вопрос в качестве команды, требующей получения истинного ответа. Выделение нормативного элемента, присущего вопросам, позволяет использовать аппарат теории деонтических модальностей для развития логической теории вопросов.

Вопросы можно рассматривать как эпистемические требования, поскольку содержание их имеет познавательное значение. Например, вопрос «Кто такая Ксантиппа?» можно отождествлять с предложением «Пусть будет так, что известно, кто такая Ксантиппа».[14] Отождествление вопросов с такого рода эпистемическими требованиями открывает новые возможности для изучения познавательных функций вопросов и позволяет строить их логический анализ на основе аппарата так называемой эпистемической логики. Наконец, в вопросах, как и в пропозициональных формах, ничего не утверждается и не отрицается.

Однако, несмотря на наличие общих свойств, полное отождествление вопросов с суждениями, командами и пропозициональными формами оказывается неправомерным, так как логическая специфика, присущая вопросам, не раскрывается при этом в надлежащей степени. Кроме того, отождествление вопросов с суждениями, пропозициональными формами и командами не исключает ссылку как раз на те вопросы, с которыми они отождествляются.

В логических исчислениях оказывается возможным строить вопросы какой угодно сложности. В сложных вопросах первого типа матрица вопроса составлена из нескольких простых предложений, находящихся в сфере действия оператора данного вопроса, например: «Вы курите папиросы, или вы предпочитаете сигареты, или вам большее удовольствие доставляет курить трубку?». В сложных вопросах второго типа матрица и оператор вопроса содержат переменные, принадлежащие к различным категориям. Если же матрица и оператор вопроса содержат одну или несколько переменных одной категории, то вопрос в этом случае является простым, или однородным. При анализе сложных вопросов первого и второго типа целесообразно разбивать их на элементарные вопросы и каждый из них рассматривать отдельно.

§ 17. Деление суждений по качеству и количеству

При анализе простых категорических суждений в них необходимо различать как качественную, так и количественную стороны.

Отражение окружающего мира в суждении производится с участием логической связки, которая осуществляет такие основные познавательные функции, как соединение или разъединение его основных элементов. Поэтому с точки зрения *качества связки* суждения делятся на две группы: утвердительные и отрицательные.

В *утвердительных* суждениях логическая связка приписывает предикат суждения субъекту. Суждение «Научно-техниче-

---

[14] В таких эпистемических требованиях фиксируется неполнота знания о некотором предмете и содержится команда дополнить знания недостающими сведениями о нем.

ская революция требует новых методов обучения» относится к разряду утвердительных суждений. Здесь к субъекту суждения «научно-техническая революция» (S) с помощью утвердительной связки, не высказанной в языке, приписывается предикат суждения «требует новых методов обучения» (P).

В *отрицательных* суждениях логическая связка отделяет предикат от субъекта суждения. Например: «Рыбы не являются теплокровными животными». В этом суждении связка отрицательная, так как признак «теплокровные животные», составляющий предикат суждения (P), несовместим с понятием «рыбы» (S).

Логическая связка суждения бывает отрицательной только в тех суждениях, когда отрицательная частица «не» стоит перед связкой. Если же отрицательная частица «не» стоит после связки, то она входит в состав предиката, и суждение относится к разряду утвердительных. Таковы, например, суждения: «Империалистические войны являются несправедливыми», «Философский идеализм — ненаучное мировоззрение», «Рассказ этого автора безыдейный».

В истории логики были точки зрения, которые пытались принизить познавательное значение отрицательных суждений за счет преувеличения роли утвердительных. В советской литературе справедливо подчеркивается, что как утвердительные, так и отрицательные суждения имеют одинаково важное познавательное значение и принижать какую-либо одну форму за счет другой неправомерно.

Деление суждений по качеству на утвердительные и отрицательные имеет свое объективное основание в окружающей действительности. Это связано с тем, что в окружающем людей мире предметы и явления либо имеют те или иные признаки, либо нет. Это и наложило свою печать на логическую связку с ее двумя формами проявления. Однако особенность человеческого мышления позволяет нам судить об одних и тех же предметах и их признаках как в утвердительной, так и в отрицательной форме. Поэтому деление суждений по качеству логической связки на утвердительные и отрицательные не должно метафизически противопоставляться. С логической точки зрения любое утвердительное суждение может быть преобразовано в отрицательное, а отрицательное — в утвердительное.

Предметом мысли, с точки зрения участия объема субъекта суждения, могут быть или единичные явления, или часть явлений какого-либо класса, или все явления данного класса. Отсюда категорические суждения по *количеству* делятся на единичные, частные и общие.

Единичные суждения характеризуются тем, что объем субъекта в них состоит только из одного элемента (индивидуальная вещь, явление, событие и т. д.). Например: «Ленинград — колыбель социалистической революции», «Ю. Гагарин — первый человек, поднявшийся в космос», «Мировая война 1914—1918 годов была империалистической». Во всех этих суждениях место субъекта занимают единичные понятия («Ленинград», «Ю. Гагарин», «мировая война 1914—1918 годов»), т. е. понятия, по своему объему относящиеся к одному предмету мысли.

От познания отдельных единичных вещей, явлений, событий люди приходят к познанию какой-то части предметов определенного класса. Этот уровень познания фиксируется с помощью частных суждений.

Частные суждения характеризуются тем, что содержание предиката относится только к части объема субъекта. Например: «Некоторые войны справедливы», «Часть советских граждан являются автолюбителями», «Большинство европейских государств являются членами ООН». Во всех частных суждениях предикат относится (утверждается или отрицается) не ко всему, а к части объема субъекта. Поэтому, выражая частное суждение при помощи грамматического предложения, мы используем дополнительно какое-то слово для выделения количественной стороны частного суждения. Для этого используем слова: некоторые, часть, большинство, меньшинство и т. д.

Такая количественная сторона частных суждений может выражать как определенную количественную сторону суждения, так и его еще недостаточно определенную сторону. Соответственно этому те частные суждения, где количественная сторона известна лишь частично (по крайней мере, некоторые), называются неопределенными частными суждениями. Например, опросив только часть студентов этой группы, мы уже можем сказать, что «некоторые студенты этой группы занимаются спортом». Здесь слово «некоторые» употребляется в смысле «по крайней мере некоторые, а может быть и все». Другие частные суждения, где слово «некоторые» употребляется в точно определенном смысле, называются определенными частными суждениями. Пример: «Некоторые государства являются членами ООН», «Некоторые металлы плавают», «Некоторые ученые являются лауреатами Ленинской премии» и т. д.

Более важной для познания формой суждения является *общее* суждение. В общих суждениях могут быть выражены законы и закономерные отношения, открываемые людьми в различных сферах человеческого познания.

Общие суждения характеризуются тем, что объем субъекта относится ко всем предметам данного класса. Например: «Все Герои Советского Союза — орденоносцы», «Все тела состоят из атомов», «Все капиталисты — эксплуататоры».

Во всех общих суждениях предикат относится (утверждается или отрицается) ко всем предметам того или иного класса.

§ 18. Объединенная классификация суждений по качеству и количеству

Ввиду того что всякое простое суждение имеет не только количественную, но и качественную характеристику, в логике принято классифицировать категорические суждения по их объединенному признаку, учитывающему взаимосвязь как качественной, так и количественной стороны суждения.

В объединенной по качеству и количеству классификации суждения делятся на четыре вида.

I. *Общеутвердительное* суждение. Это суждение является общим по количеству и утвердительным по качеству. Символически общеутвердительное суждение записывается следующим образом: «Все *S* есть *P*», где количественная («все») и качественная («есть») стороны суждения явно выражены в языке. Например: «Все звезды светят собственным светом», «Все философы до Маркса были идеалистами в учении об обществе», «Все банкиры — эксплуататоры». Приведенные суждения являются общими с точки зрения количества и утвердительными с точки зрения качества. Сокращенно общеутвердительные суждения обозначаются буквой *A* (первой буквой от латинского слова *affirmo*, что в переводе означает — утверждаю).

II. *Общеотрицательное* суждение. Это суждение является общим по количеству и отрицательным по качеству. В виде обобщенной формулы общеотрицательное суждение записывается следующим образом: «Ни одно *S* не есть *P*», где количественная («ни одно») и качественная («не есть») стороны суждения явно выражены в языке. Например: «Ни одна научная истина не является совместимой с религиозной верой», «Ни один советский человек не желает новой войны», «Ни одна нация не может существовать без общего языка». Приведенные здесь суждения являются общими с точки зрения количества и отрицательными с точки зрения качества. Общеотрицательные суждения символически обозначаются буквой *E* (взята первая гласная буква от латинского слова *nego*, что в переводе означает — отрицаю).

III. *Частноутвердительное* суждение. Это суждение является частным по количеству и утвердительным по качеству. В виде обобщенной формулы частноутвердительное суждение записывается следующим образом: «Некоторые *S* есть *P*», где количественная («некоторые») и качественная («есть») стороны суждения явно выражены в языке. Например: «Некоторые философы являются материалистами в решении основного вопроса философии», «Некоторые африканские страны встают на путь строительства социализма», «Некоторые рыбы летают». Эти три суждения являются частными с точки зрения количества и утвердительными с точки зрения качества. Сокращенно частноутвердительные суждения обозначаются буквой *I* (вторая гласная буква от латинского слова *affirmo*).

IV. *Частноотрицательное* суждение. Это суждение является частным по количеству и отрицательным по качеству. В виде символической формулы частноотрицательное суждение записывается следующим образом: «Некоторые *S* не есть *P*», где количественная («некоторые») и качественная («не есть») стороны суждения явно выражены в языке. Примеры: «Некоторые азиатские государства не являются социалистическими», «Некоторые студенты не изучают английский язык», «Некоторые войны не являются справедливыми». Все три суждения являются частными с точки зрения количества и отрицательными с точки зрения качества. Эти суждения обозначаются буквой *O* (второй гласной от латинского слова *nego*).

Единичные суждения из объединенной классификации категорических суждений в самостоятельную группу не выделяются. По своей логической характеристике с точки зрения количества все единичные суждения относятся к общим суждениям: либо к общеутвердительным, либо к общеотрицательным. Например: «Н. В. Гоголь является великим русским писателем» — относится по своей логической характеристике к общеутвердительному суждению (*A*), так как предикат («великий русский писатель») относится ко всему, а не к части объема субъекта («Н. В. Гоголь»). Другое единичное суждение: «Л. Фейербах не был материалистом в понимании общественных закономерностей» — относится по своей логической характеристике к общеотрицательным суждениям (*E*), так как предикат («материалист в понимании общественных закономерностей») полностью исключается из всего объема субъекта («Л. Фейербах»).

§ 19. Распределенность терминов в категорических суждениях

Разобранные выше четыре основных вида категорических суждений имеют на месте субъекта и предиката конкретные понятия (или термины), которые в каждом отдельном суждении могут быть взяты либо распределенными, либо нераспределенными.

Распределенным термином (или понятием) называется такой термин, который в данном суждении взят во всем объеме. Если же термин в данном суждении взят не во всем объеме, а лишь частично, то такой термин называется *нераспределенным*.

Рассмотрим суждения общеутвердительные, общеотрицательные, частноутвердительные и частноотрицательные с точки зрения распределенности в них понятий, стоящих на месте субъекта и предиката.

В *общеутвердительных* суждениях (*A*), понятия, которые находятся на месте субъекта, должны быть всегда распределенными, т. е. в данном виде суждений они обязательно должны быть взяты во всем объеме. Если же термин в общеутвердительном суждении, стоящий на месте субъекта, будет взят нераспределенным (т. е. взят не во всем объеме), то данное суждение перестает быть общеутвердительным, оно переходит в разряд частноутвердительных суждений.

Термин, который стоит в общеутвердительном суждении на месте предиката, как правило, является нераспределенным. Лишь в тех случаях, когда объем предиката равен объему субъекта, термин на месте предиката является также распределенным.

Разберем на примерах оба случая распределенности терминов в общеутвердительных суждениях.

1-й случай. Возьмем следующие два суждения «Все банкиры (S) — эксплуататоры (P)», «Все студенты (S) должны сдавать экзамены (P)». В этих примерах термины, стоящие на месте субъекта, распределены, так как они участвуют в данном суждении во всем объеме («все банкиры», «все студенты»). А термины, которые стоят на месте предикатов, в данных суждениях являются нераспределенными, так как они («эксплуататоры», «должны сдавать экзамены») участвуют по своему объему лишь частично. Это объясняется тем, что термин, например, «эксплуататоры» в данном суждении связан лишь с термином «банкиры», а кто еще входит в объем понятия эксплуататоры, в данном суждении не раскрывается. Подавляющее большинство терминов, стоящих на месте предиката в общеутвердительных суждениях, находятся в отношении подчинения, где подчиняющим является предикат, а подчиненным — субъект. Графически эти отношения могут быть изображены кругами Эйлера (рис. 7).

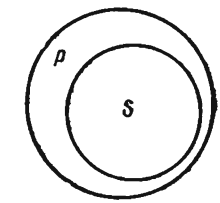


Рис. 7

Из этого рисунка видно, что «все банкиры» (S) входят в объем понятия «эксплуататоры» (P), но не все, кто относится к эксплуататорам, являются банкирами.

2-й случай — когда в общеутвердительных суждениях понятия на месте предиката являются распределенными. Например: «Все квадраты — прямоугольники с равными сторонами». «Все треугольники — геометрические фигуры, ограниченные тремя пересекающимися прямыми на плоскости», «Ленинград — колыбель пролетарской революции». Во всех этих суждениях объем понятия, стоящего на месте предиката, равен объему понятия, стоящего на месте субъекта. В таких суждениях субъект и предикат всегда распределены. Графически термины в таких суждениях изображаются как тождественные по объему понятия (рис. 8).

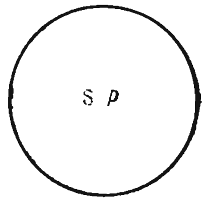


Рис. 8

В *общеотрицательных* суждениях (*E*) термины как на месте субъекта, так и на месте предиката всегда распределены. Это связано с тем, что объем понятия, стоящего на месте предиката, полностью исключается из объема понятия, стоящего на месте субъекта. Например: «Ни один капиталист (*S*) не работает по найму (*P*)», «Ни одна планета (*S*) не есть звезда (*P*)», «Ни одна рыба (*S*) не является теплокровным животным (*P*)». Графически термины в общеотрицательных суждениях всегда изображаются так, что объем одного понятия несовместим с объемом другого понятия (рис. 9).

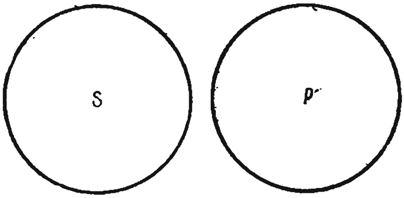


Рис. 9

В *частноутвердительных* суждениях (*I*) термин на месте субъекта всегда нераспределен. Термин же на месте предиката в частноутвердительных суждениях, как правило, является нераспределенным, но бывает исключение, когда термин на месте предиката в частноутвердительных суждниеях берется распределенным. Разберем оба случая на примерах.

1-й случай. Как правило, термины и на месте предиката и на месте субъекта являются нераспределенными. Например: «Некоторые американцы (*S*) являются сторонниками холодной войны (*P*)», «Некоторые студенты (*S*) изучают английский язык (*P*)», «Некоторые европейские государства (*S*) являются членами ООН (*P*)». Во всех таких суждениях термины не распределены не только на месте субъекта, но и на месте предиката. Графически термины в таких суждениях находятся в отношении частичного совпадения (рис. 10).

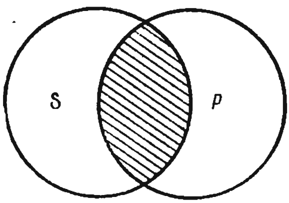


Рис. 10

2-й случай — когда в частноутвердительных суждениях термин на месте предиката является распределенным. Например: «Некоторые государства (*S*) являются членами ООН (*P*)», «Некоторые орденоносцы (*S*) — Герои Социалистического Труда (*P*)». «Некоторые позвоночные (*S*) являются млекопитающими (*P*)». Во всех таких суждениях понятия на месте предиката являются распределенными, а понятия на месте субъекта остаются нераспределенными. Графически термины в подобных суждениях находятся в отношении подчинения, где предикат полностью входит в объем понятия субъекта, но его не исчерпывает (рис. 11).

В *частноотрицательных* суждениях (*O*) термин на месте субъекта всегда не распределен, а термин на месте предиката всегда распределен. Это связано с тем, что в таких суждениях весь объем предиката исключается из части объема субъекта. Например: «Некоторые англичане (S) не являются сторонниками холодной войны (P)», «Некоторые студенты (S) не являются спортсменами (P)», «Некоторые животные (S) не являются хищниками (P)». Во всех таких суждениях предикат полностью исключается из части объема субъекта. Графически это сходно с отношением перекрещивающихся понятий, но это касается той части объема субъекта, которая не входит в объем предиката (рис. 12).

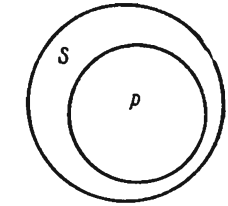


Рис. 11

Бывают примеры, когда объем предиката не выходит за рамки объема субъекта, но все равно объем предиката полностью отрицается в части объема субъекта. Поэтому во всех частноотрицательных суждениях понятия на месте субъекта всегда не распределены, а понятия на месте предиката всегда распределены. Графически это сходно с отношением

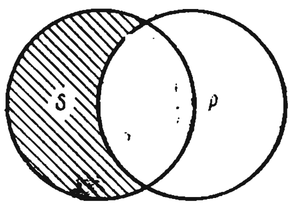


Рис. 12

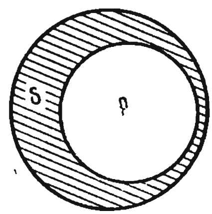


Рис. 13

между понятиями типа подчинения, но предикат полностью отрицается в части объема субъекта (рис. 13).

§ 20. Отношения между суждениями

Между суждениями *A, E, I, O* с одинаковой материей (т. е. с одинаковыми терминами) существуют четыре вида отношений:

1) *отношение подчинения,* в котором находятся суждения *A* и *I, E* и *O*. Суждения *A* и *E* — *подчиняющие,* а суждения *I* и *O* — *подчиненные.* Если общее суждение истинно, то истинно одинаковое с ним по материи и качеству частное, но не наоборот. Например, из истинности частного суждения «Некоторые логические теории анализируют высказывания, выражающие требования морали» не следует истинность общего суждения того же качества и с теми же терминами;

2) *отношение противоречия между суждениями E* и *I, A* и *O*. Здесь суждения *E* и *I*, а также *A* и *O* относятся друг к другу как утверждение и отрицание. Поэтому в каждом из этих двух суждений одно является обязательно истинным, а другое —

обязательно ложным. Например, если суждение A («Все логические законы имеют методологическое значение») истинно, то суждение O той же материи — ложно. Если суждение O («Некоторые этические теории прогрессивны») истинно, то общее суждение той же материи ложно;

3) *отношение контрарности* между суждениями A и E. В первом из них утверждается определенный вид отношения S к P, а именно, что объем S полностью содержится в объеме P; а во втором, т. е. в суждении E, отрицается как этот вид отношения между S и P, так и отношение перекрещивания объемов S и P, т. е. отношение противоположности не сводится к отрицанию одного суждения другим. Поэтому противоположные суждения могут быть одновременно ложными. Пример: а) «Все целебные вещества органические» и б) «Ни одно целебное вещество не является органическим». При условии истинности одного из противоположных (контрарных) суждений другое обязательно ложно;

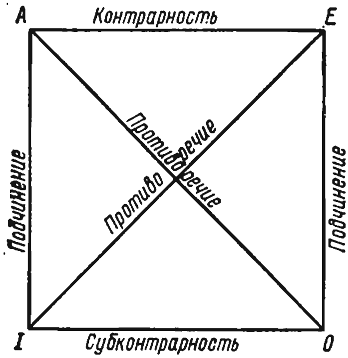


Рис. 14

4) *отношение субконтрарности* — отношение между I и O. Эти суждения оба могут быть одновременно истинными, но не могут быть оба одновременно ложными.

Все рассмотренные отношения между суждениями показаны на рис. 14 (так называемый «логический квадрат»).

Определенные логические отношения существуют также между суждениями, у которых одинаковые либо только предикаты, либо только субъекты. В первом случае существует отношение подчинения, если они имеют одно и то же качество, а субъект одного суждения является понятием, подчиненным по отношению к понятию субъекта другого. Пример: «Все планеты светят отраженным светом», «Юпитер светит отраженным светом».

Если такие суждения имеют разные качества, то они являются противоречащими.

Суждения с одинаковым субъектом противоположны, если противоположными являются их предикаты. Например, «Кант был последовательным материалистом» и «Кант был последовательным идеалистом». Эти суждения — противоположные, так как они оба могут быть ложными, как это и есть в данном примере, но не могут быть оба одновременно истинными.

Если у двух суждений с одинаковым субъектом предикаты — совместимые понятия, то они будут согласными и могут оказаться одновременно как ложными, так и истинными. Например, одновременно истинными являются суждения «Бородин был химиком» и «Бородин был композитором». Одновременно ложными суждениями являются: «Формальная логика изучает законы внешнего мира», «Формальная логика изучает общественно-экономические отношения людей».

Между суждениями совершенно разной материи логика никаких отношений указать не может.

§ 21. Деление суждений по модальности

Простые суждения отличаются друг от друга в зависимости от того, какую *модальность* они имеют.

Термин «модальность» употребляется в логике в двух смыслах: в узком и в широком. В узком смысле модальностями называются такие свойства суждений, как необходимость, действительность, возможность, случайность и т. п. Например, модальность необходимости какого-либо простого суждения A констатируется нами, когда мы утверждаем: «Необходимо, что A»; модальность возможности какого-либо суждения B — когда мы говорим: «Возможно, что B» и так далее. Если мы просто говорим: «C», то это значит, что мы считаем, что суждение C имеет модальность действительности. Такого рода модальности многие логики называют *модальностями* в собственном смысле слова. В последнее время для их обозначения употребляют термин «*алетические* модальности» (от греческого слова «*алетейя*» — истина). Он вводится для того, чтобы отличить эти модальности от других разновидностей модальностей в том случае, когда слово «модальность» понимается в широком смысле.

В широком смысле модальностями называются самые различные свойства суждений. Так, например, говоря: «известно, что A», «доказуемо, что B», «сомнительно, что C», «A обязательно», «B разрешается», «C запрещается», «A хорошо», «B плохо», «C предпочтительно», — мы утверждаем разные модальности тех или иных суждений. Даже такие характеристики суждений, как «было, что A», «будет, что B», «имеет место, что C», относят к модальностям в широком смысле слова.

Все это разнообразие модальностей разделено логиками на классы. Существуют классы *нормативных*, *оценочных*, *эпистемических* (от греческого слова «эпистеме» — знание), *временных* и т. п. модальностей. Каждый класс модальностей служит предметом изучения соответствующего раздела современной логики. Не имея здесь возможности описать все классы модальностей в широком смысле слова, мы ограничимся модальностями в узком смысле и рассмотрим их свойства и некоторые логические зависимости, существующие между ними.

В логике принято считать *основными* алетическими модальностями модальности необходимости, действительности и возможности. Имеется еще ряд алетических модальностей, связанных с основными, так или иначе *производных* от основных.

С ними мы познакомимся ниже. Сначала следует ознакомиться с терминологией, которую многие авторы употребляют в связи с алетическими модальностями. Суждения, выражающие необходимость, часто называют *аподиктическими;* суждения, выражающие действительность, — *ассерторическими;* суждения, выражающие возможность, — *проблематическими.*

Модальность суждения может быть выражена явно, т. е. указание на нее может содержаться в самой форме суждения, но она может быть выражена и неявно, заключаться лишь в содержании суждения. Так, если мы говорим: «необходимо, что *A*», то ясно, что модальность суждения *A* выражается явно, причем указание на его необходимость вынесено наружу и присоединено к нему в виде *функтора*, или *оператора*, «необходимо, что...». Это не единственно возможный способ явно выразить модальность суждения. Часто указание на модальность суждения не выносится наружу, а заключается в связке: «*S* необходимо есть *P*».

Модальность может заключаться в суждении неявно. Например: «Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы». Очевидно, что это аподиктическое суждение, хотя в нем нигде не встречается слово «необходимость». Несмотря на это, в суждении утверждается необходимая связь между величинами катетов и гипотенузы всякого треугольника, что и позволяет причислить его к аподиктическим, исходя исключительно из его содержания. Можно было бы выразить необходимость этой геометрической теоремы и явно (что иногда делается): «Сумма квадратов катетов *необходимо* равна квадрату гипотенузы».

Здесь уместно поставить вопрос о том, какие по содержанию суждения считаются в логике аподиктическими, какие — ассерторическими, какие — проблематическими. Иначе говоря, это вопрос о содержательной, семантической интерпретации модальностей необходимости, действительности и возможности. Отвечая на него, надо сразу сказать, что в современной логике существует несколько таких интерпретаций, главные из которых не противоречат, впрочем, друг другу, а лишь отличаются друг от друга степенью общности и абстрактности.

Если говорить в самом общем виде, то необходимость считается присущей логическим правилам вывода, законам логики и других наук, а также положениям, которые выводятся из этих законов по этим правилам. Ассерторическими считаются суждения, выражающие те или иные фактически существующие обстоятельства или положения вещей. Возможность приписывается таким положениям вещей, которые фактически, быть может, и не существуют, но существование которых не противоречит законам логики и других наук.

В плане конкретизации этой интерпретации следует упомянуть о бытующем в современной логике делении модальностей на *логические* и *физические*. Наименования эти, равно как и само деление, в значительной степени условны, что будет видно из нижесказанного. Логически необходимыми считаются правила и законы логики и других дедуктивных наук: математики, чистой механики и т. п. Логически возможным считается все то, что этим законам не противоречит. Физически необходимыми именуют законы всех естественных наук, а физически возможным оказывается все то, что не противоречит этим последним. Соотношения между логическими и физическими модальностями таковы: то, что физически необходимо, отнюдь не всегда необходимо логически, а то, что логически возможно, отнюдь не обязательно возможно физически. Так, например, законы Ньютона, Фарадея, равно как и все другие подобные им эмпирические зависимости, отнюдь не являются логически необходимыми. С другой стороны, логически вполне возможно, что камень, которому позволено свободно падать, полетит не вниз, а вверх или что в проводнике, вращаемом в магнитном поле, не будет индуцироваться электрический ток.

В современной логике распространена также интерпретация алетических модальностей с помощью так называемой системы «возможных миров». Это абстрактная интерпретация, которая может быть различным образом конкретизирована. Допустим, что у нас имеется некоторое количество n предметных моделей, которые логиками условно называются «мирами». «Положение дел» в каждом из «миров» описывается при помощи некоторого класса m простых суждений. Разница между мирами заключается в следующем: то, что истинно в одном из них, может оказаться ложным в другом. Для каждого суждения из списка m существует область «миров», в которых оно истинно, и область «миров», в которых оно ложно. Один из «миров» выделяют особо. Он считается моделью действительности: то, что истинно в этом «мире», истинно в действительности. По отношению к этому, «действительному миру» остальные оказываются только «возможными». В них являются ложными некоторые из тех суждений, которые истинны в «действительном мире». Разумеется, что в каждом «возможном мире» имеются такие истинные суждения, которые истинны и в «действительном».

Модальности при помощи вышеописанной системы «возможных миров» интерпретируются следующим образом. Аподиктическими являются те суждения, которые истинны *во всех* мирах, ассерторическими — те, которые истинны в «действительном мире», проблематическими — те, которые истинны хотя бы в одном из «возможных миров».

Абстрактную модель «возможных миров» можно конкретизировать следующим образом. Допустим, что мы рассматриваем окружающий нас реальный мир в его развитии. Условно разделив время, в котором протекает это развитие, на отдельные моменты, предположим, что перед нами стоит задача описать состояние нашего мира в те или иные моменты его развития. Ясно, что в силу изменений, происходящих в процессе развития нашего мира, то, что является истинным в одни моменты времени, может оказаться ложным в другие. Интерпретировать систему «возможных миров» можно здесь так: пусть каждый «возможный мир» будет сопоставлен отдельному моменту времени развития нашего мира, а «действительный мир» будет соответствовать *настоящему* моменту. При такой интерпретации появляется возможность выразить алетические модальности через посредство временных. Необходимым тогда окажется то, что имеет место во все моменты времени, то, что всегда было, есть и будет. Возможным оказывается то, что имело, имеет или будет иметь место хотя бы в один какой-либо момент времени. Действительным — то, что имеет место в настоящий момент. Существует несколько вариантов интерпретаций алетических модальностей при помощи системы «возможных миров» и временных модальностей. Мы привели в качестве примеров простейшие из них. Все вышеприведенные интерпретации позволяют сформулировать следующие логические зависимости между основными алетическими модальностями.

1. Если нечто является необходимым, то оно действительно; обратное — неверно. Пример: Исаакиевский собор необходимо есть Исаакиевский собор, ибо это вытекает из закона тождества. В то же время Исаакиевский собор действительно есть Исаакиевский собор. Мы не сможем привести примера, когда нечто необходимое не является действительным. Но из действительности чего-либо не следует его необходимость. Например, Зимний дворец действительно имеет зеленую окраску, но отсюда не следует, что он необходимо имеет ее.

2. Если нечто является действительным, то оно возможно; обратное — неверно. В самом деле, констатация действительного существования чего бы то ни было есть лучшее доказательство его возможности. Так, если люди действительно находятся на Луне, то, значит, это возможно. Наоборот, из возможности чего-либо не следует его действительность. Так, вполне возможно, что люди побывают и на Марсе, но пока в действительности этого нет.

3. Если нечто является необходимым, то оно возможно; обратное — неверно. Эта зависимость вытекает из двух предыдущих.

Данные зависимости можно выразить другим способом. Заметим, что если суждение A необходимо, то суждение «необходимо, что A» истинно; если суждение A возможно, то суждение «возможно, что A» истинно.

Учитывая это, вышеприведенные зависимости можно уточнить следующим образом:

(1) из истинности суждения «необходимо, что A» следует истинность суждения A, но не наоборот; из ложности сужде-

ния *A* следует ложность суждения «необходимо, что *A*», но не наоборот;

(2) из истинности суждения *A* следует истинность суждения «возможно, что *A*», но не наоборот; из ложности суждения «возможно, что *A*» следует ложность суждения *A*, но не наоборот;

(3) из истинности суждения «необходимо», что *A*» следует истинность суждения «возможно, что *A*», но не наоборот; из ложности суждения «возможно, что *A*» следует ложность суждения «необходимо, что *A*», но не наоборот.

Теперь перейдем к *производным* модальностям. Они могут быть введены различными способами. В частности, производные модальности возникают, если модальность суждений исследовать с учетом их качества и количества.

Соединенное рассмотрение модальности и количества суждений представляет собой сложную проблему, еще недостаточно

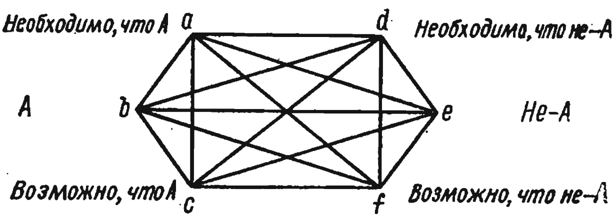


Рис. 15

хорошо изученную современной логикой. Еще очень много неясного как в модальной квантификационной теории вообще, так и в модальной силлогистике в частности. Поэтому, оставив этот вопрос в стороне, остановимся на соединенном рассмотрении модальности и качества суждений.

Здесь дела обстоят значительно проще. Начнем с того, что рассмотрим основные алетические модальности отрицательных суждений. Это можно сделать по-разному. Мы поступим так: возьмем *отрицание* суждения *A* и применим к нему последовательно все основные модальности. Получим следующие суждения: «необходимо, что не-*A*», «не-*A*», «возможно, что не-*A*», аподиктическое, ассерторическое и проблематическое соответственно. Со времени античности и средневековья известны логические зависимости между ними и суждениями: «необходимо, что *A*», «*A*» и «возможно, что *A*». Эти зависимости легче понять, если изобразить их наглядно, графически, в виде «модального» шестиугольника (рис. 15).

Линии *ab*, *bc* и *ac* изображают приведенные выше зависимости (1)—(3) между основными модальностями утвердительных суждений.

Эти зависимости выражают отношение *подчинения:* модальность действительности подчиняется модальности необходимости, а модальность возможности подчиняется им обеим. Линии *de, ef* и *df* изображают аналогичные отношения подчинения между основными модальностями отрицательных суждений. Эти отношения могут быть записаны в виде зависимостей, аналогичных зависимостям (1)—(3).

Остальные линии шестиугольника изображают различные отношения между модальностями утвердительных суждений, с одной стороны, и модальностями отрицательных суждений — с другой. В той или иной форме все эти отношения содержат в себе отрицание. Рассмотрим важнейшие из них.

Начнем с диагоналей шестиугольника: линий *af*, *cd* и *be*. Они изображают отношения *контрадикторности* между модальностями, которые они соединяют. Если два каких-либо суждения контрадикторны, то когда одно из них истинно, другое — ложно, а когда одно из них ложно, то другое — истинно. Это можно также выразить в следующей форме: из двух контрадикторных суждений одно истинно тогда и только тогда, когда истинно отрицание другого, а ложно тогда и только тогда, когда ложно отрицание другого. Соответственно, отношения, изображаемые линиями *af*, *cd* и *be*, дают следующие зависимости:

(4) суждение «необходимо, что *A*» истинно тогда и только тогда, когда истинно суждение «невозможно, что не-*A*», и ложно тогда и только тогда, когда последнее ложно;

(5) суждение «возможно, что не-*A*» истинно тогда и только тогда, когда суждение «не необходимо, что *A*» истинно, и ложно тогда и только тогда, когда последнее ложно. Зависимости (4) и (5) соответствуют линии *af*;

(6) суждение «необходимо, что не-*A*» истинно тогда и только тогда, когда истинно суждение «невозможно, что *A*», и ложно тогда и только тогда, когда ложно последнее;

(7) суждение «возможно, что не-*A*» истинно тогда и только тогда, когда истинно суждение «не необходимо, что не-*A*», и ложно тогда и только тогда, когда последнее ложно. Зависимости (6) и (7) соответствуют линии *cd*.

Ограничимся написанными зависимостями, лишь отметив, что линия *be* шестиугольника выражает так называемый «закон двойного отрицания». Выписанные зависимости интересны тем, что дают две производные модальности: модальность невозможности и модальность не-необходимости.

Линии *ad*, *ae* и *bd* изображают отношения *контрарности* между соединяемыми ими модальностями. Если суждения контрарны, то из истинности одного из них следует ложность другого, из ложности одного из них ни истинность, ни ложность другого не следуют. Иначе говоря, контрарные суждения не могут быть одновременно истинными, но могут быть одновременно ложными. Так, суждение «необходимо, что не-*A*» и «необходимо, что *А*» могут быть одновременно ложными, но если одно из них истинно, то ложность другого следует логически.

Линии *bf*, *ce* и *cf* изображают отношение *субконтрарности* между соответствующими модальностями. Если суждения субконтрарны, то из ложности одного из них следует истинность другого, но из истинности одного ни ложность, ни истинность другого не следуют. Иначе говоря, субконтрарные суждения не могут быть одновременно истинными. Так, если одно из суждений «возможно, что *А*» и «возможно, что не-*А*» ложно, то другое обязательно будет истинным. В случае, когда одно из них истинно, другое может быть как истинным, так и ложным. Случай, когда оба они истинны, дает нам еще одну производную модальность: модальность *случайности*. Большинство логиков считает, что сказать «случайно, что *А*» то же самое, что сказать «возможно, что *А*, и возможно, что не-*А*».

Производными, но несколько в ином смысле, чем модальности невозможности, не-необходимости и случайности, являются также так называемые *итерированные* модальности. Они получаются итерацией, или повторением, всех вышеописанных модальностей, как основных, так и производных, причем повторяться они могут в самых различных сочетаниях и сколь угодно раз. Сюда относятся такие, например, суждения, как «возможно, что возможно, что *А*», «необходимо, что необходимо, что *А*», «возможно, что необходимо, что не-*А*», «невозможно, что возможно, что необходимо, что не *А*» и т. п., и т. п. Зависимости, существующие между различными итерированными модальностями, служат предметом изучения современной логики. Здесь возникают сложные проблемы, говорить о которых нет возможности в рамках данной книги.

§ 22. Сложные суждения

Помимо простых логика изучает также *сложные* суждения. Сложные суждения образуются путем соединения между собой простых суждений при помощи *логических союзов*. Существует значительное количество различных логических союзов; мы здесь рассмотрим главные из них. Таковыми в современной логике являются следующие: *конъюнкция, исключающая* и *неисключающая дизъюнкции*, *импликация* и *эквивалентность*. В естественном языке перечисленные логические союзы выражаются при помощи грамматических союзов «и», «либо..., либо», «или», «если..., то», «тогда и только тогда, когда».

Не следует полностью отождествлять логические и грамматические союзы. В логическом контексте союзы «и», «или», «если..., то» и др. приобретают специфический логический смысл.

Каждый из перечисленных союзов бинарен, т. е. соединяет между собой *два* суждения. Например: «Эрмитаж расположен на Дворцовой площади, и каждый желающий может его посетить»; «Осенью часто идет дождь или дует ветер»; «Либо данное число делится на два, либо оно является нечетным»; «Если поднести магнит к рассыпанным на листе бумаги железным опилкам, то они расположатся вдоль силовых линий магнитного поля»; «Треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда он равноуголен».

Заметим, что логические союзы могут соединять не только простые суждения, но также простые со сложными и сложные между собой, образуя порой весьма протяженные конструкции. Например: «Если треугольник прямоугольный, то он не остроугольный и не тупоугольный»; «Либо студент Петров должен сдать все экзамены вовремя, либо он должен взять академический отпуск, и если ему удастся получить академический отпуск, то он сможет продолжить обучение в будущем году» и т. п. В состав подобного рода конструкций входит по нескольку логических союзов, но легко видеть, что каждый из них соединяет друг с другом только два каких-нибудь суждения. В таких конструкциях различают связь между *главными* и *подчиненными* логическими союзами. Так, в первом из приведенных выше примеров союз «если..., то» является главным, а союз «и» — подчиненным, а во втором союз «и» — главным, а все остальные — подчиненными.

В современной логике сложные суждения классифицируются в зависимости от того, каким у них является главный логический союз. Так, суждения вида «A и B», где A и B — любые суждения, называются *соединительными,* или *конъюнктивными;* суждения вида «A или B» и «Либо A, либо B» — *разделительными* или *дизъюнктивными*; суждения вида «Если A, то B» — *условными,* или *импликативными*; суждения вида «A тогда и только тогда, когда B» — *суждениями эквивалентности.*

Рассмотрим все эти разновидности сложных суждений по отдельности.

1. **Соединительные (конъюнктивные) суждения.** Соединительным, или конъюнктивным, суждением называется суждение, полученное из любых двух других суждений посредством логического союза «и».

Логический союз «и» имеет следующие свойства. Пусть нам дано некоторое суждение «A и B». Допустим также, что A и B — семантически независимые друг от друга суждения, т. е. истинность или ложность A не влечет ни истинности, ни ложности B, равно как истинность или ложность B не влечет ни истинности, ни ложности A. Тогда суждение «A и B» является *функцией истинности* суждений A и B. Это значит, что истинность или ложность суждения «A и B» полностью определяется истинностью или ложностью составляющих его суждений A и

В. Очевидно, что для двух семантически независимых друг от друга суждений возможны только следующие четыре комбинации: оба истинны; *А* истинно, но *В* ложно; *А* ложно, но *В* истинно; оба ложны. Истинность или ложность конъюнктивного суждения «*А* и *В*» заранее известна для каждой из комбинаций суждений *А* и *В*. Имеет место следующая зависимость: соединительное суждение истинно тогда, когда истинны оба составляющих его суждения, и ложно во всех остальных случаях. Эту зависимость можно графически изобразить в виде следующей таблицы:

А	*В*	*А* и *В*
истинно	истинно	истинно
истинно	ложно	ложно
ложно	истинно	ложно
ложно	ложно	ложно

Из сказанного становится ясным основное различие между логическим и грамматическим союзами «и». Грамматическим союзом «и» соединяют обычно суждения, имеющие между собой что-либо общее по смыслу. Логический же союз «и» может соединять *любые* суждения. Единственное требование для того, чтобы конъюнктивное суждение было истинным, заключается в том, чтобы были истинными оба составляющих его суждения.

2. **Разделительные (дизъюнктивные) суждения**. Современная логика рассматривает два типа разделительных суждений: *исключающе-разделительные* и *неисключающе-разделительные*.

а) *Исключающе-разделительные суждения*. Исключающе-разделительным называется суждение, полученное из любых двух других суждений при помощи логического союза «либо..., либо». Исключающе-разделительное суждение называют иногда *альтернативным*. Суть союза «либо..., либо» состоит в том, что он соединяет несовместимые друг с другом суждения. Этим определяются его семантические свойства.

Суждение «Либо *А*, либо *В*», подобно суждению «*А* и *В*» является функцией истинности суждений *А* и *В*. Но, разумеется, это *другая* функция истинности: хотя истинность или ложность суждения «Либо *А*, либо *В*» полностью определяется истинностью или ложностью составляющих его суждений, определяется она, однако, по-другому, не так, как для суждения «*А* и *В*». Здесь имеет место следующая зависимость: исключающе-разделительное суждение истинно, когда одно из его составляющих истинно, а другое ложно, и ложно, когда оба составляющих истинны и когда оба они ложны. Эту зависимость изобразим в виде такой таблицы:

A	*B*	Либо *A*, либо *B*
истинно	истинно	ложно
истинно	ложно	истинно
ложно	истинно	истинно
ложно	ложно	ложно

Здесь также нужно подчеркнуть разницу между грамматическим и логическим союзами «либо..., либо». Если имеем дело с логическим «либо..., либо», то опять-таки связь по смыслу между суждениями *A* и *B* необязательна. Для истинности исключающе-разделительного суждения достаточно того, чтобы оба они не были одновременно истинными или одновременно ложными.

б) *Неисключающе-разделительные суждения.* Неисключающе-разделительным называется суждение, полученное из любых двух суждений при помощи логического союза «или». Союзу «или» современные логики не придают исключающего смысла. Суждения, соединяемые «или», вполне совместимы. В отличие от исключающе-разделительного суждения, неисключающе-разделительное истинно и тогда, когда истинны оба его составляющие. Здесь имеет место такая зависимость: неисключающе-разделительное суждение ложно тогда, когда ложны оба составляющих его суждения, и истинно во всех остальных случаях. Эту зависимость изобразим в виде таблицы:

A	*B*	*A* или *B*
истинно	истинно	истинно
истинно	ложно	истинно
ложно	истинно	истинно
ложно	ложно	ложно

В этом случае тоже справедливо то, что сказано выше относительно двух предыдущих логических союзов: *A* и *B* могут быть любыми суждениями, не обязательно связанными по смыслу.

3. **Условные (импликативные) суждения.** Условным называется суждение, полученное из любых двух других суждений посредством логического союза «если..., то». В условном суждении «Если *A*, то *B*» составляющая *A* называется *основанием,*

или *антецедентом,* а составляющая *B — следствием,* или *консеквентом.*

Логический союз «если..., то» в особенности не следует путать с соответствующим грамматическим союзом. Обычно в естественном языке союз «если..., то» выражает причинную зависимость или другую какую-либо содержательную связь следования между A и B. Логический союз «если..., то», как и все вышеописанные логические союзы, может соединять *любые* суждения и не требует содержательной связи между ними. Условное суждение «Если A, то B» является функцией истинности составляющих A и B, и его истинность или ложность зависит не от их смысла, а лишь от их истинности или ложности. Существует следующая семантическая зависимость: условное суждение ложно тогда, когда его основание истинно, а следствие ложно, и истинно во всех остальных случаях. Этой зависимости соответствует таблица:

A	B	Если A, то B
истинно	истинно	истинно
истинно	ложно	ложно
ложно	истинно	истинно
ложно	ложно	истинно

Таким образом, получается, что импликативное суждение истинно, если истинны антецедент и консеквент, независимо от их содержания. Будет, например, истинным с логической точки зрения такое суждение: «Если дважды два равно четырем, то снег бел», хотя с содержательных позиций оно просто бессмысленно. Истинными с точки зрения логики оказываются также все условные суждения с ложным антецедентом, например такие: «Если дважды два равно пяти, то снег бел» и «Если дважды два равно пяти, то снег черен», что также бессмысленно с содержательных позиций. Ложно с логической точки зрения условное суждение только в одном случае: когда антецедент истинный, а консеквент ложный. Так суждение «Если дважды два равно четырем, то снег черен» является ложным. Это соответствует содержательному представлению о том, что условное суждение не может быть истинным, если при истинном основании обнаруживается, что у него ложное следствие.

4. **Суждения эквивалентности.** Суждением эквивалентности называется такое суждение, которое получено из любых двух других суждений при помощи логического союза «тогда и только тогда, когда...». Семантическая характеристика суждения эквивалентности определяется следующей зависимостью: суждение

эквивалентности истинно, когда оба составляющих его суждения истинны и когда оба они ложны, и ложно в прочих случаях. Этой зависимости соответствует следующая таблица истинности:

A	*B*	*A* тогда и только тогда, когда *B*
истинно	истинно	истинно
истинно	ложно	ложно
ложно	истинно	ложно
ложно	ложно	истинно

Глава III

ОСНОВНЫЕ ФОРМАЛЬНО-ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

§ 23. Общие замечания

Любая наука стремится к раскрытию закономерных связей в описываемом ею содержании. Основной целью этого процесса является выделение таких объективных условий, соблюдение которых приводит в конечном счете к правильному отражению окружающей действительности в сознании человека, к истинным результатам познания. «Над всем нашим теоретическим мышлением, — писал Ф. Энгельс, — господствует с абсолютной силой тот факт, что наше субъективное мышление и объективный мир подчинены одним и тем же законам и что поэтому они и не могут противоречить друг другу в своих результатах, а должны согласоваться между собой. Факт этот является бессознательной и безусловной предпосылкой нашего теоретического мышления».[15] Применительно к логике задача раскрытия закономерных связей ее содержания состоит в выявлении таких отношений между мыслями, которые, во-первых, находятся в соответствии с общими связями и отношениями между вещами и, во-вторых, выступают условием истинного познания.

В законе логики своеобразно отражается общественно-историческая практика людей. «...Практика человека, миллиарды раз повторяясь, закрепляется в сознании человека фигурами логики. Фигуры эти имеют прочность предрассудка, аксиоматический характер именно (и только) в силу этого миллиардного повторения».[16]

Существует бесчисленное множество законов логики, отражающих различные виды связи между суждениями и понятиями. К числу логических законов относятся, например, те необходимые условия, которым должны удовлетворять различные логические операции. Эти условия формулируются часто в виде правил. Таковы, например, правила определения, правила деления и т. п. Большое значение в логике имеют законы, выражающие зависимость истинности (или ложности) одних суждений от истинности (или ложности) других. Эти законы определяют логически правильные формы умозаключений. Примером логического закона может служить утверждение: «Если все *M* суть *P* и все *S* суть *M*, то все *S* суть *P*». Какие бы конкретные по содержанию понятия мы не подставили вместо *M*, *P* и *S* в указанное предложение, всякий раз все это предложение

[15] Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 581.
[16] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 198.

будет истинным. Подобные выражения в современной символической (математической) логике получают название тождественно-истинных.

Среди бесчисленного множества логических законов принято выделять следующие четыре: закон тождества, закон противоречия, закон исключенного третьего и закон достаточного основания. Они называются основными формально-логическими законами. За исключением закона достаточного основания, все они могут быть выражены тождественно-истинными формулами. Выделение этих законов в качестве основных определяется тем, что в них формулируются наиболее общие и необходимые условия не только логической правильности каждой конкретной связи между суждениями и понятиями, но и самой возможности мышления как познавательной деятельности. Они выражают необходимые условия построения мыслей и тем самым содействуют правильному ходу познающего действительность мышления, поскольку сами являются результатом отражения тех наиболее часто встречающихся свойств и отношений предметов и явлений действительности, с которыми мы сталкиваемся в «миллиарды раз повторенной практике». Не исчерпывая всех закономерностей мышления, развивающегося в соответствии с законами диалектического материализма, основные формально-логические законы указывают на то, что результаты познания должны находить свое выражение в мыслях определенным, непротиворечивым, последовательным и доказательным образом. Эти основные черты правильного мышления возникли в результате постоянного взаимодействия между человеком и материальным миром, сформировались на основе трудовой, практической деятельности, которая, в свою очередь, основывается на правильном отражении связей и отношений реально существующих вещей. Их не следует ни отождествлять с законами самой действительности, ни рассматривать в полном отрыве от нее.

§ 24. Закон тождества

Объективные процессы, происходящие в природе и обществе, характеризуются постоянным взаимодействием, развитием, столкновением противоположных тенденций в вещах, явлениях, свойствах и отношениях. Все это свидетельствует об изменчивости, относительности различных сторон объективной действительности. Вместе с тем в процессе взаимодействия вещи, свойства и отношения в определенных пределах сохраняют качественную определенность, обладают относительной устойчивостью, что позволяет рассматривать их в мышлении как определенные предметы. «Мы не можем, — писал В. И. Ленин, — представить, выразить, смерить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, угрубив, не разделив, не омертвив живого. Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление, — и не только мыслью, но и ощущением, и не только движения, но и всякого понятия».[17] Именно с этой спецификой отражения сложных процессов действительности и связано требование об определенности, однозначности наших мыслей в процессах рассуждения. Сущность требования об определенности и однозначности наших мыслей раскрывается в законе тождества, который основан на правильном понимании того обстоятельства, что любая вещь, изменяясь, вместе с тем сохраняет на конкретных этапах своего развития некоторые основные, существенные в данной связи свойства, некоторые устойчивые отношения к другим вещам, относительную определенность, отграниченность от других вещей.

Закон тождества можно сформулировать следующим образом: *объем и содержание мысли о каком-либо предмете должны быть строго определены и оставаться постоянными в процессе рассуждения о нем.*

Закон тождества принято выражать также формулой $A = A$ или A суть A. В соответствии с законом тождества, рассуждая о чем-либо, например о «студенте Петрове», «геометрической фигуре», «империализме» и т. д., мы должны уточнить объем и содержание этих понятий и в процессе рассуждения не подменять их другими. Выполнение требования закона тождества обеспечивает точность, определенность, недвусмысленность наших рассуждений, создает возможность различать и отождествлять предметы в формальных системах по выражающим их терминам. Сознательное ограничение объема и содержания мыслей о различных предметах позволяет на основе закона тождества производить абстракцию их отождествления.

В ходе развития логики и философии в понимании закона тождества проявляется противоположность между диалектикой и метафизикой. «*Принцип тождества* в старо-метафизическом смысле, — писал Ф. Энгельс, — есть основной принцип старого мировоззрения: $a = a$. Каждая вещь равна самой себе. Все считалось постоянным — солнечная система, звезды, организмы. Естествознание опровергло этот принцип в каждом отдельном случае, шаг за шагом; но в области теории он все еще продолжает существовать, и приверженцы старого все еще противопоставляют его новому: „вещь не может быть одновременно сама собой и другой“».[18] Критикуя метафизическое понимание закона тождества в схоластической логике и в так называемой школьной логике, которая после Канта принимает форму отождествления этого закона с философским принципом, выражающим рассмотрение вещей как неподвижных и неизменных, классики марксизма-ленинизма показали, что закон тождества, описываемый формулой $a = a$, носит относительный характер.

---

[17] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 233.
[18] Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 530.

Метафизическое понимание закона тождества связано с представлением о законах логики как о таких, которые полностью независимы от содержания познания, от характера объектов исследования и в этом смысле являются законами абсолютными.

Критику метафизического истолкования закона тождества как философского принципа дал еще немецкий философ Гегель (1770—1831). Но это была критика с позиций идеализма, поэтому Гегель не выявил полностью рациональный смысл формулы $a = a$.

Познавательное значение закона тождества, его относительный характер полностью раскрывается лишь с позиций диалектического материализма. Здесь обнаруживается, что определенность и однозначность мыслей в процессе рассуждения не есть их неотъемлемое свойство, а представляет собой результат логической обработки понятий и суждений, который совершается в процессе познания и опирается на относительную устойчивость, определенность вещей объективного мира. Понятие о тождестве вещи самой себе есть идеализация, которая получается в результате отвлечения от не существенных на данной ступени исследования изменений самой вещи. Логическая обработка мыслей состоит прежде всего в отвлечении от таких свойств мыслимых вещей, которые делают объемы мыслей неопределенными. Для суждений логическая обработка состоит, например, в таком уточнении заключенной в них информации, при котором они принимают только одно из двух логичеоких значений: либо истинно, либо ложно. Лишь после уточнения объема и содержания наших мыслей можно говорить об эффективном применении к ним формально-логическх законов. Указывая на неправильное понимание «империализма» К. Каутским, В. И. Ленин писал: «Спорить о словах, конечно, не умно. Запретить употреблять „слово" империализм так или иначе невозможно. Но надо выяснить точно понятия, если хотеть вести дискуссию».[19]

Использование закона тождества в практике познания должно быть подчинено диалектико-материалистическому принципу конкретности истины. Это означает, что закон тождества должен применяться к логически обработанным, уточненным со стороны объема и содержания мыслям, к мыслям о вещах, явлениях и процессах, уровень достигнутого знания о которых позволяет четко отличить их от других вещей, явлений и процессов. Это означает также, что уточнение мыслей об окружающей нас действительности должно проводиться в соответствии с развитием и углублением нашего знания о ней. Какая именно часть знания о вещах, явлениях и процессах будет использоваться в наших рассуждениях, всякий раз зависит от конкрет-

[19] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 30, с. 93.

ной ситуации. Но важно, чтобы эта уточненная часть знания не изменялась в процессе установления логической связи между ней и другими мыслями, в процессе конкретного рассуждения или вывода. В этом случае закон тождества оказывается условием правильных рассуждений, предпосылкой истинного познания.

Требование определенности, предъявляемое нашему мышлению законом тождества, нередко нарушается в практике рассуждений. Например, трудно или вообще невозможно понять человека, который, говоря о чем-либо, упускает предмет своей мысли, перескакивает с одной мысли на другую, не закончив первую, не следит за логической и смысловой связью между ними и т. п. Причиной нарушения закона тождества является иногда использование различных значений слов в одном определенном контексте рассуждений. Нередко в один и тот же употребляемый в разговоре термин спорящие вкладывают, в нарушение закона тождества, различное содержание. Нарушения подобного рода ведут к логической ошибке, которая называется подменой понятия. Суть этой ошибки состоит в том, что в процессе рассуждения вместо данного понятия употребляется понятие с другим содержанием, что ведет к подмене предмета рассуждения. В результате различные предметы будут ошибочно приниматься за один и тот же предмет. Отсюда видно, что закон тождества выступает тем необходимым условием, без выполнения которого невозможно никакое логически правильное рассуждение.

§ 25. Закон противоречия

Условием истинного познания выступает также требование непротиворечивости мышления. Суть этого требования раскрывается в формально-логическом законе противоречия, который можно сформулировать следующим образом: *в процессе рассуждения о каком-либо определенном предмете нельзя одновременно утверждать и отрицать что-либо в одном и том же отношении, в противном случае оба суждения не могут быть вместе истинными.*

Закон противоречия принято выражать также в виде формулы $\overline{(A \wedge \bar{A})}$. В содержании закона противоречия находит отражение относительная устойчивость, определенность процессов и вещей окружающей нас действительности. Поэтому закон противоречия имеет силу лишь при соблюдении некоторых условий.

Рассмотрим действие закона противоречия на следующем примере. Два суждения: «Петров знает английский язык» и «Петров не знает английского языка» не могут быть оба сразу истинными, если относительно обоих суждений, во-первых, выполняется требование закона тождества, во-вторых, суждения относятся к одному и тому же времени и, в-третьих, утверждение и отрицание рассматриваются в одном и том же отношении.

Выполнение требования закона тождества предполагает в данном примере, что речь идет об одном и том же человеке. Если бы утверждение относилось к одному Петрову, а отрицание к другому Петрову, то между суждениями не было бы противоречий. Возможно, что первый Петров знает английский язык, а второй — нет.

Естественно предположить отсутствие противоречия между этими суждениями и в том случае, когда утверждение и отрицание относятся к одному и тому же предмету, но к разным временам. Например, суждение «Петров знает английский язык» относится к настоящему времени, а суждение «Петров не знает английского языка» — к прошлому. Соблюдение первых двух условий действия закона противоречия не гарантирует, однако, полностью его выполнения. Для этого необходимо также соблюдение еще третьего условия.

Действительно, противоречия не будет в том случае, когда оба высказывания относятся к одному и тому же предмету, взятому в одно и то же время, но утверждение рассматривает его в одном отношении, а отрицание — в другом. Если в суждении «Петров знает английский язык» под знанием языка в одном случае подразумевается только умение читать специальную литературу без словаря, а в другом случае под теми же словами подразумевается способность работать в качестве переводчика, то оба суждения не противоречат друг другу. По сути дела здесь требуется выполнение закона тождества не только относительно субъекта, но и относительно предикатов в суждении. Рассмотренные случаи показывают, что закон противоречия имеет силу лишь в области таких суждений, где утверждение и отрицание производятся одновременно об определенном предмете, взятом в одном и том же отношении.

Закон противоречия справедлив относительно любых видов противоположных суждений и выступает своеобразным критерием последовательности рассуждений в обыденном и научном мышлении. Он играет важную роль в теории дедуктивного вывода и построении доказательства, поскольку выступает определяющим моментом в понимании и обосновании логической необходимости следования заключений из посылок. Следование заключения из посылок является логически необходимым лишь в том случае, когда при отрицании заключения мы не вступаем в противоречие с посылками умозаключения.

Качественная определенность вещей и явлений, относительное постоянство и устойчивость их свойств являются объективной основой закона противоречия. Закон противоречия является объективно необходимым результатом процесса познания действительности, связанным с «огрублением», «омертвлением» движения мыслью. Поэтому он требует, чтобы наши рассуждения о действительности не были противоречивыми, и направлен против нарушения последовательности в мышлении. «„Логической противоречивости", — при условии, конечно, правильного логического мышления — не должно быть *ни* в экономическом *ни* в политическом анализе».[20]

Появление формально-логических противоречий в составе научной теории ставит под сомнение возможность ее обоснования и применения целиком всей этой теории на практике. В логике справедливо следующее правило $(A \wedge \bar{A}) \vdash B$, которое означает, что из логического противоречия (логически противоречивого выражения) следует любое суждение. Иначе говоря, если научная теория, использующая классическую дедуктивную логику, содержит логическое противоречие, то истинные и ложные положения выводимы в этой теории в равной мере. Естественно предположить, что использовать для практических целей такую теорию, в которой не различается истина и ложь, нецелесообразно.

В то же время формально-логические противоречия по отношению к науке в определенном смысле играют роль движущей силы. Стремление путем перестройки устранить из нее формально-логические противоречия, чтобы сделать теорию практически применимой, и трудности подобной перестройки, связанные с необходимостью сохранить существенные стороны этой теории, нередко приводят к появлению различных новых направлений в развитии науки. Такие ситуации известны в истории развития математических теорий (математического анализа, теории множеств) и других наук.

Требование непротиворечивости, предъявляемое к научным теориям, является в настоящее время одним из важнейших. Если доказана непротиворечивость теории, то тем самым доказана теоретическая возможность материальных объектов, удовлетворяющих этой теории, и в силу этого возможность практического ее использования. Отсюда следует, что если теория имеет целью быть примененной на практике, то она не должна содержать логических противоречий, поскольку наука и практика убедительно свидетельствуют об отсутствии в природе объектов, одновременно обладающих и не обладающих некоторым свойством в одном и том же отношении. Эту суть процесса отражения действительности через практику в сознании людей и выражает формально-логический закон противоречия.

§ 26. Закон исключениого третьего

В процессе познания мы нередко сталкиваемся с необходимостью отражения в мышлении такого простого факта, что вещи или их свойства, когда мы отвлекаемся от их объективного

---

[20] Там же, с. 91.

изменения и развития, существуют или не существуют, присущи вещам или не присущи. Это находит свое выражение в законе исключенного третьего формальной логики. Закон исключенного третьего следует рассматривать как дальнейшее уточнение требований непротиворечивости, последовательности и определенности, предъявляемых к мышлению. Он должен способствовать устранению из наших рассуждений неопределенных, двусмысленных выражений, употреблению определенных вопросов и ответов в спорах и дискуссиях и т. д.

В статье «Спорьте о тактике, но давайте ясные лозунги!» В. И. Ленин писал: «...партия борющегося класса обязана при всех этих спорах не упускать из виду необходимости совершенно ясных, *не допускающих двух толкований,* ответов на конкретные вопросы нашего политического поведения: да или нет? делать ли нам теперь же, в данный момент, то-то или не делать?».[21]

Закон исключенного третьего имеет силу лишь при условии соблюдения требований ранее изложенных законов тождества и противоречия и может быть сформулирован следующим образом: *в процессе рассуждения необходимо доводить дело до определенного утверждения или отрицания, в этом случае истинным оказывается одно из двух отрицающих друг друга суждений.*

Смысл закона исключенного третьего выражает формула: $A \dot{\vee} \bar{A}$ (истинно A или его отрицание не-A).

Законом исключенного третьего исключается истинность какого-то третьего суждения, кроме того суждения, к которому мы пришли, или его отрицания. Здесь предлагается сделать выбор из двух противоречащих друг другу суждений. Одно из них должно быть непременно истинным. При этом закон не указывает, какое именно из суждений истинно, но указывает, что истина лежит лишь в пределах этих двух суждений, а не какого-то третьего. Закон исключенного третьего имеет силу относительно любых пар суждений, в которых одно утверждает то, что отрицается в другом. Например, из высказываний: (1) «Все планеты имеют спутников» и (2) «Неверно, что все планеты имеют спутников» (или, что то же самое, «Некоторые планеты не имеют спутников») истинным является только одно, а именно (2). Никакого «третьего» высказывания, которое также было бы истинным, между ними образовать нельзя.

Суждения (1) или (2) находятся в отношении противоположности друг к другу. Здесь следует отметить, что закон исключенного третьего имеет обязательную силу лишь для определенного вида противоположности между высказыванием и его отрицанием, а именно для отношения контрадикторной противоположности. Примером этого отношения является отноше-

---

[21] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 11, с. 246.

ние суждений (1) и (2). Для отношения же контрарной или так называемой диаметральной противоположности закон исключенного третьего силы не имеет. Если мы сравним суждение (1) «Все планеты имеют спутников» с суждением (3) «Ни одна планета не имеет спутников», то обнаружим, что ни одно из них не может быть истинным, оба суждения ложны. В то же время между ними «укладывается» некоторое «третье» суждение (2) «Некоторые планеты не имеют спутников», которое как раз и оказывается истинным. Суждения (1) и (3) не удовлетворяют закону исключенного третьего. Это обстоятельство в отдельных случаях может выступать показателем контрарной противоположности между суждениями. Любая пара суждений, подчиняющаяся действию закона исключенного третьего, подчиняется также и закону противоречия, но не обязательно имеет место обратное.

Несмотря на ограниченность своего применения, закон исключенного третьего играет все же значительную роль как в практике познания, так и в решении многих чисто логических вопросов. Он лежит в основе многих умозаключений и доказательств от противного (косвенных доказательств). В косвенных доказательствах устанавливается ложность противоречащего доказываемому суждению положения, что на основании закона исключенного третьего позволяет заключать об истинности доказываемого суждения.

Вместе с законом противоречия закон исключенного третьего имеет важное значение в операции отрицания в двузначной логике, т. е. в логике, где суждения имеют лишь два логических значения — истина и ложь. Смысл операции отрицания заключается в том, что изменяется форма исходного истинного суждения и в результате образуется ложное суждение. Так, например, отрицанием общеутвердительного суждения (1) «Все планеты имеют спутников» будет его частноотрицательная форма (2) «Некоторые планеты не имеют спутников», а отрицанием частноутвердительного суждения (4) «Некоторые планеты имеют спутников» будет общеотрицательная форма (3) «Ни одна планета не имеет спутников». Поскольку суждения (1) и (2), а также (3) и (4) взаимно отрицают друг друга, то, согласно закону исключенного третьего, одно из пары суждений непременно истинно. Но если к этим суждениям применим закон исключенного третьего, то, как уже отмечалось, к ним применим также и закон противоречия. Согласно же последнему пары суждений (1) и (2), а также (3) и (4) не могут быть одновременно истинными. Следовательно, если по закону исключенного третьего одно из двух суждений истинно, то другое по закону противоречия ложно. Относительно любого суждения и его отрицания, к которым одновременно применимы закон исключенного третьего и закон противоречия, можно утверждать, что одно из них непременно истинно, а другое непременно ложно.

Закон исключениого третьего не включает указания иа то, какое именно из двух противоречащих друг другу суждений истиино. Решение этого вопроса выходит уже за рамки логики и требует обращения к практике как критерию истины наших мыслей.

§ 27. Закои достаточного осиования

Определенность, последовательность и непротиворечивость наших мыслей способствуют использованию их в качестве надежных средств дальнейшего познания действительности, в практической деятельности людей. Важным условием правильного мышления является также свойство доказательности. Это свойство мысли выражается в законе достаточного основания, который можно сформулировать следующим образом: *в процессе рассуждения достоверными следует считать лишь те суждения, относительно истинности которых могут быть приведены достаточные основания.*

Рассуждение, в котором истинность некоторого положения не просто утверждается, но указываются основания, в силу которых мы не можем не признать его истинным, следует считать доказательным. При этом под достаточными основаниями истинности некоторого суждения понимается совокупность обязательно истинных других суждений, из которых первое следует с логической необходимостью. В состав этих истинных суждений могут входить аксиомы, определения, суждения непосредственного восприятия, истинность которых установлена опытным путем, суждения, истинность которых доказана с помощью других истинных суждений. Выражение «могут быть приведены» в формулировке закона достаточного основания следует понимать таким образом, что основания — истинные суждения — не обязательно должны формулироваться явным образом, но могут лишь подразумеваться, хотя и могут быть всегда выявлены при уточнении формы доказательства доказываемого (основного) положения. Следование основного положения из своих «достаточных оснований» — обязательно истинных суждений — должно быть логически необходимым, т. е. таким, что при отрицании основного положения мы вступаем в противоречие с его достаточными основаниями.

Доказательность мысли — одно из важнейших условий истинного процесса познания, поскольку обоснование наших рассуждений является отражением объективных связей самих вещей и явлений действительности. Доказательное рассуждение не только утверждает истинность некоторого положения, но и обосновывает его истинность. Закон достаточного основания требует выводить новые положения из уже твердо установленных, проверенных, доказанных истин.

Закон достаточного основания выражает лишь в общем виде требование исчерпывающего учета всех оснований для каждой истины. В нем не указывается, какое именно основание должно быть в каждом отдельном случае (достаточно ли простого чувственного восприятия факта или необходимо привлечение ранее доказанных положений), где и каким образом обнаруживается это основание. В законе утверждается только, что оно должно быть. Вопросы же специфики основания для каждой конкретной истины требуют специального рассмотрения на базе содержания той отрасли знания, к которой эта истина относится. Так, например, достаточным основанием истинности суждения (1) «Летом теплее, чем зимой» может служить показание термометра или истинное суждение (2) «Летом ртутный столбик термометра стоит выше, чем зимой», из которого (1) следует логически необходимым образом.

Объективным основанием всех явлений действительности выступает их всеобщая универсальная и закономерная связь. Здесь отдельные основания — причины явлений находятся в сложных взаимодействиях. Одно явление (причина) с необходимостью вызывает другое явление (следствие, действие). Всякое действие имеет свою причину, так же как всякая причина вызывает определенное действие. На отражение этой закономерности и опирается закон достаточного основания.

В работе «Статистика и социология» В. И. Ленин отмечал, что только во взаимосвязи и цельности факты могут служить основанием для правильного рассуждения, но случайно вырванный факт сам по себе ничего не может обосновать. «В области явлений общественных нет приема более распространенного и более несостоятельного, как выхватывание *отдельных* фактиков, игра в примеры. Подобрать примеры вообще — не стоит никакого труда, но и значения это не имеет никакого, или чисто отрицательное, ибо все дело в исторической конкретной обстановке отдельных случаев. Факты, если взять их в их *целом,* в их *связи,* не только „упрямая", но и безусловно доказательная вещь. Фактики, если они берутся вне целого, вне связи, если они отрывочны и произвольны, являются именно только игрушкой или кое-чем еще похуже»[22]. Отсюда следует, что в логически правильных рассуждениях с целью познания истины необходимо избегать произвола и субъективизма. Обосновывая истинность некоторого суждения при помощи других истинных суждений, необходимо опираться на знание внутренних, необходимых связей между предметами. В противном случае за основание вывода, достаточное основание суждения может быть принято то, что в действительности основанием не является. Например, простое следование событий во времени одного за другим не может само по себе быть достаточным

[22] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 30, с. 350.

основанием для утверждения, что первое событие есть причина, а второе есть следствие первого.

Большинство истин науки — высшей формы познания действительности — получено с помощью доказательств, путем обоснования через другие достоверные положения. И хотя в процессе доказательства тех или иных положений не всегда возможна их непосредственная практическая проверка, все же необходимо опираться на такие истины, которые или проверены сами непосредственно на практике, или, в свою очередь, обосновываются с помощью непосредственно проверенных на практике истин. В конечном счете при обосновании истинности любого положения мы с необходимостью должны опираться на практику.

Закон достаточного основания требует, чтобы истина не просто утверждалась, но всегда могла быть доказана. При этом доказательство должно опираться только на достоверные положения, отражающие внутренние, необходимые связи между вещами и явлениями действительности, а в конечном счете на практику как критерий истины.

Глава IV

УМОЗАКЛЮЧЕНИЕ

§ 28. Определение умозаключения

Как выяснилось в предыдущей главе, суждения, имеющие частично или полностью одинаковую материю, находятся в определенном отношении друг к другу, зависят одно от другого. Эта зависимость является логическим основанием для выведения нового суждения из данных. *Выведение суждения из других суждений называется умозаключением.*

Суждения, из которых выводится новое суждение, называются *посылками*, а выводимое суждение — *заключением.* Но не в каждой тройке или ином количестве суждений одно будет относиться к остальным как заключение к посылкам, т. е. с необходимостью вытекать из них.

Возьмем следующие две тройки суждений.

а) 1. $a = b$.
2. $b = c$.
―――――
3. $a = c$.

б) 1. Стекло прозрачно.
2. Алмаз не стекло.
―――――
3. Алмаз непрозрачен.

В примере (а) третье суждение (суждение под чертой) является действительно заключением из первых двух. В примере же (б) третье суждение не является заключением из первых двух.

Возникает вопрос: как отличить действительное заключение от мнимого, правильное с логической точки зрения умозаключение от неправильного? Конечно, умозаключение будет правильным тогда и только тогда, когда в нем выполняются основные формально-логические законы (закон тождества, закон противоречия и закон исключенного третьего). Это значит, что в заключении не может быть терминов или, говоря более общо, элементов, частей материи, отличных от тех, которые содержатся в посылках. Кроме этого, заключение не должно быть суждением, противоречащим какой-либо из посылок. Если заключение построено из посылок, то для проверки того, что действительно построено из посылок по законам логики, достаточно убедиться в том, что суждение, противоречащее ему, находится в противоречии также с посылкой, содержащей предикат или следствие заключения.

Следовательно, *правильное умозаключение есть построение такого суждения из материи других суждений, замена которого противоречащим ему суждением приводит к противоречию с посылками.*

Отношение основания и следствия в отдельно взятом суждении, как известно, просто утверждается безо всякого обоснования этого отношения. Пока суждение рассматривается лишь как таковое, только в аспекте его структуры, не возникает вопроса ни о какой детерминации этого отношения. Но когда суждение взято нами не только как таковое, но еще и как заключение из посылок, для логики возникает задача, указать отношение двух элементов материи заключения к третьему элементу в посылках. Этот третий элемент является в умозаключении опосредующим звеном между двумя другими элементами.

Обозначим это опосредующее звено символом *C*, а другие два элемента символами *A* и *B*. Пусть при этом в заключении утверждается, что без *B* нет *A*.

Для того чтобы в этом случае посылки детерминировали заключение, требуется, чтобы в одной из них утверждалось, что без *B* нет *C*, а в другой — что без *C* нет *A*. Тогда рассуждение в целом будет соответствовать первой схеме из следующих трех:

$$1)\ \frac{\begin{array}{l}\text{Без } B \text{ нет } C.\\ \text{Без } C \text{ нет } A.\end{array}}{\text{Без } B \text{ нет } A.}\qquad 2)\ \frac{\begin{array}{l}\text{Все } C \text{ есть } B.\\ \text{Все } A \text{ есть } C.\end{array}}{\text{Все } A \text{ есть } B.}\qquad 3)\ \frac{\begin{array}{l}\text{Если } C, \text{ то } B.\\ \text{Если } A, \text{ то } C.\end{array}}{\text{Если } A, \text{ то } B.}$$

где горизонтальная черта означает «следовательно».

В первой схеме символом *C* обозначаются одинаковые части материи в двух суждениях, независимо от того, являются ли эти части терминами категорических суждений или частями условных суждений. Соответственно символы *B* и *A* обозначают разные части, которые могут быть либо терминами категорических суждений, либо основаниями и следствиями условных и условно-разделительных суждений.

Вторая из этих схем символизирует умозаключение, состоящее исключительно из категорических суждений, в каждом из которых подразумевается отношение, выражаемое одним из утверждений в первой схеме.

Третья схема соответствует умозаключению, которое получится из первой схемы, если станем считать, что символы *B*, *C* и *A* обозначают не термины категорического суждения, а части условных суждений.

Схему (1) и получающиеся из нее указанным выше способом схемы (2) и (3) можно иллюстрировать соответственно следующими примерами:

$$1)\ \frac{\begin{array}{l}\text{Без нагревания металла нет его трения.}\\ \text{Без расширения металла нет его нагревания.}\end{array}}{\text{Без расширения металла нет его трения.}}$$

$$2)\ \frac{\begin{array}{l}\text{Всякий нагревающийся металл есть расширяющийся.}\\ \text{Всякий металл, подвергающийся трению, есть нагревающийся.}\end{array}}{\text{Всякий металл, подвергающийся трению, есть расширяющийся.}}$$

3) Если металл нагревается, то он расширяется.
Если металл подвергается трению, то он нагревается.

Если металл подвергается трению, то он расширяется.

В каждом умозаключении мысленно осуществляется переход от утверждения основания в широком смысле к утверждению следствия или от отрицания следствия к отрицанию основания и этим самым дается ответ на вопрос, почему заключение должно быть именно таким, а не иным. Но в чистом виде эти особенности умозаключения видны тогда, когда одна посылка есть условное суждение, а вторая — категорическое суждение. В других случаях эти особенности бывают облечены в своеобразную, специфическую форму того или другого вида умозаключения, которая позволяет устанавливать особые правила умозаключения для этих видов. Поскольку данные правила связаны с особой формой того или иного вида умозаключения, непосредственно применимы к ней, то в практике мышления удобнее пользоваться ими, чем в каждом отдельном случае опираться на какой-либо общий закон, согласно которому следует выводить заключение из посылок.

В отношении любых видов умозаключений задача логики состоит в установлении правильных способов выведения заключения из посылок. Понятно, что заключение будет *необходимо* истинным только тогда, когда правильность выведения заключения из посылок сочетается с *истинностью последних*. Заключение, конечно, может быть иногда истинным и в том случае, когда оно правильно выведено из ложных посылок. Например: «Звезды вращаются вокруг Земли», «Луна есть звезда», следовательно, «Луна вращается вокруг Земли». Но из других ложных посылок может вытекать ложное заключение. Следовательно, из истинности заключения не следует истинность посылок.

Умозаключения принято делить на непосредственные и опосредованные. Рассмотрим каждый из этих видов.

§ 29. Непосредственные умозаключения

Обычно непосредственные умозаключения определяют как состоящие из двух суждений: одной посылки и заключения. Отсюда следует, что заключение должно строиться в них из тех же элементов материи, которая содержится в посылке. Пример:

Суждение «Все S суть P» — истинно.

Суждение «Некоторые S суть P» — истинно.

В действительности это не совсем точно. На самом деле особенности непосредственных умозаключений заключаются в том, что одна из посылок — условное суждение, в котором формулируется отношение по истинности двух видов суждений, а вторая посылка представляет собой утверждение, соответствующее основанию первой посылки. В связи с этим заключение является утверждением наличия следствия, о котором говорится в первой посылке.

Эти особенности проявляются во всех разновидностях непосредственных умозаключений, к которым обычно относят:

1) умозаключения, основанные на отношениях суждений по логическому квадрату, а именно: 1а) умозаключение противоречия; 1б) умозаключение противоположности; 1в) умозаключение субконтрарности; 1г) умозаключение подчинения;

2) умозаключение модальности;

3) умозаключение превращения;

4) умозаключение обращения;

5) умозаключение противопоставления предикату.

Рассмотрим каждую из этих разновидностей.

1а. *Умозаключение противоречия.* Данное умозаключение основывается непосредственно на законе исключенного третьего, согласно которому либо утверждение чего-нибудь является истинным, а отрицание того же самого — ложным, либо отрицание утверждения является истинным, а само утверждение — ложным. Формула закона исключенного третьего $A \vee \bar{A}$ является сокращенным выражением следующих четырех формул: (1) Aи $\rightarrow \bar{A}$л; (2) Aл $\rightarrow \bar{A}$и; (3) $\bar{A}$и $\rightarrow A$л; (4) $\bar{A}$л $\rightarrow A$и, где буква «и» означает «истинно», буква «л» — «ложно», буква «A»— утверждение чего-нибудь, знак «-» — «не», знак «$\rightarrow$» — «если ..., то».

Отметим, что отрицанием суждения A является суждение O, отрицанием суждения I — суждение E, отрицанием единичного утвердительного суждения a является отрицательное единичное суждение той же материи e. Поэтому первую из приведенных четырех формул можно рассматривать в качестве сокращенного выражения следующих трех: (1) Aи $\rightarrow O$л; (2) aи $\rightarrow e$л; (3) Iи $\rightarrow E$л. Вторая из четырех формул является сокращенным выражением формул: (1) Aл $\rightarrow O$и; (2) aл $\rightarrow e$и; (3) Iл $\rightarrow E$и. Третья формула из четырех является сокращенным выражением формул: (1) Eи $\rightarrow I$л; (2) eи $\rightarrow a$л; (3) Oи $\rightarrow A$л. Четвертая формула является сокращенным выражением формул: (1) Eл$\rightarrow I$и; (2) eл $\rightarrow i$и; (3) Oл $\rightarrow A$и.

Допустим теперь, что требуется ответить на вопрос, истинно ли определенное общеутвердительное или частно-отрицательное суждение.

На первую часть вопроса, несомненно, мы можем дать ответ, если располагаем знаниями о том, что: (1) Oл $\rightarrow A$и (это знание содержится в законе исключенного третьего) и (2) данное суждение O, одинаковое по материи с тем суждением A, истинность которого мы желаем узнать, — ложно. Соединяя эти два знания в качестве посылок, мы получим по законам логики заключение о том, что интересующее нас общеутвердительное суждение является истинным. Пример:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Если суждение } O \text{ ложно, то суждение } A \text{ — истинно.}\\ \text{Суждение } O \text{ «Некоторые дельфины не живут в воде» — ложно.}\end{array}}{\text{Следовательно, суждение } A \text{ «Все дельфины живут в воде» — истинно.}}$$

Аналогичным образом мы можем построить умозаключение при ответе на вторую часть вопроса, используя в качестве посылок знания о том, что: (1) $A\text{л} \to O\text{и}$, (2) суждение A, одинаковое по материи с суждением O, истинностью которого мы интересуемся, — ложно. В первом случае умозаключение соответствует схеме:

$$\frac{\begin{array}{l}O\text{л} \to A\text{и}\\ O\text{л}\end{array}}{A\text{и}}.$$

Во втором случае оно соответствует схеме:

$$\frac{\begin{array}{l}A\text{л} \to O\text{и}\\ A\text{л}\end{array}}{O\text{и}}.$$

Понятно, что в умозаключениях противоречия возможны еще и такие две разновидности, которые соответствуют схемам:

$$\frac{\begin{array}{l}A\text{и} \to O\text{л}\\ A\text{и}\end{array}}{O\text{л}}; \qquad \frac{\begin{array}{l}O\text{и} \to A\text{и}\\ O\text{и}\end{array}}{A\text{л}}.$$

Данные четыре схемы видоизменяются для тех умозаключений, в которых делается вывод об истинности или ложности единичных суждений. Схемы таких умозаключений получаются, если вместо A подставить символ единичного утвердительного суждения «*а*», а вместо O — символ единичного отрицательного суждения «*е*». Примеры для иллюстрации их рекомендуем читателю привести самому после ознакомления с сущностью умозаключений противоречия.

Данная структура умозаключения соответствует понятию умозаключения, которое разъяснялось выше. Но этого соответствия, конечно, не будет, если умозаключения станем трактовать так, что в них заключение в буквальном смысле слова выводится из одной посылки, строится только из материи последней. Согласно этой трактовке надо было бы приведенную нами разновидность умозаключений выражать схемой:

$$\frac{O\text{л}}{A\text{и}}$$

Но данная схема показывает, что материя посылки и материя заключения неодинаковы, так как в посылке содержится предикат «ложно», а в заключении — предикат «истинно». Субъект заключения и субъект посылки в данном случае оказываются тоже разными.

1б. Умозаключение противоположности. Эти умозаключения основаны непосредственно на законе противоречия (непротиворечия). В них заключение является суждением с предикатом «ложно». Здесь не может быть заключением суждение с предикатом «истинно», так как противоположные суждения оба могут быть ложными одновременно, а следовательно, в них нельзя умозаключать от ложности одного к истинности другого.

В умозаключениях противоположности может делаться вывод либо о ложности общего суждения, либо о ложности единичного суждения. В первом случае они бывают двух видов. Схема и пример первого вида:

$$\frac{\begin{array}{l} E\text{и} \rightarrow A\text{л} \\ E\text{и} \end{array}}{A\text{л}}.$$

Если суждение E истинно, то суждение A той же материи — ложно.
Суждение E «Ни один дельфин не рыба» — истинно.

Суждение A той же материи «Все дельфины — рыбы» — ложно.

Схема и пример второго вида:

$$\frac{\begin{array}{l} A\text{и} \rightarrow E\text{л} \\ A\text{и} \end{array}}{E\text{л}}.$$

Если суждение A истинно, то суждение E той же материи — ложно.
Суждение A «Все дельфины суть млекопитающие» — истинно.

Суждение E «Ни один дельфин не есть млекопитающее» — ложно

Противоположными суждениями, кроме суждений A и E, как известно, являются два утвердительных единичных суждения, в которых одинаковый субъект, а предикаты — противоположные понятия. Пример: «Эта бумага белая» и «Эта бумага черная». В этих случаях мы также можем умозаключать к ложности одного из них на основании знания, что другое суждение истинно, и знания того, что оба они истинными быть не могут.

1в. *Умозаключение субконтрарности.* В этих умозаключениях делается вывод об истинности либо частноутвердительного, либо частноотрицательного суждения по схемам:

$$1)\ \frac{\begin{array}{l} I\text{л} \rightarrow O\text{и} \\ I\text{л} \end{array}}{O\text{и}}. \qquad 2)\ \frac{\begin{array}{l} O\text{л} \rightarrow I\text{и} \\ O\text{л} \end{array}}{I\text{и}}.$$

Примеры таких умозаключений можно составить, используя субконтрарные суждения, приведенные в связи с рассмотрением отношений суждений по логическому квадрату.

1г. *Умозаключения подчинения.* Здесь делается вывод об истинности суждений *I* и *O*, а также о ложности суждений *A* и *E* по следующим схемам:

1) $\dfrac{\begin{array}{l}Аи \rightarrow Iи\\ Аи\end{array}}{Iи}$; 2) $\dfrac{\begin{array}{l}Еи \rightarrow Ои\\ Еи\end{array}}{Ои}$; 3) $\dfrac{\begin{array}{l}Ол \rightarrow Ел\\ Ол\end{array}}{Ел}$; 4) $\dfrac{\begin{array}{l}Iл \rightarrow Ал\\ Iл\end{array}}{Ал}$.

Примеры, соответствующие этим схемам:

1) Если суждение *A* истинно, то суждение *I* той же материи тоже истинно.
Суждение *A* «Все понятия являются отражениями действительности» — истинно.

Суждение *I* «Некоторые понятия являются отражениями действительности» — истинно.

2) Если суждение *E* истинно, то суждение *O* той же материи — истинно.
Суждение *E* «Ни одна империалистическая война не является справедливой» — истинно.

Суждение *O* «Некоторые империалистические войны несправедливы» — истинно.

3) Если суждение *O* ложно, то суждение *E* той же материи—ложно.
Суждение *O* «Некоторые приматы не млекопитающие» — ложно.

Суждение *A* «Все приматы не млекопитающие» — ложно.

4) Если суждение *I* ложно, то суждение *A* той же материи тоже ложно.
Суждение *I* «В некоторых капиталистических государствах средства производства принадлежат всему народу» — ложно.

Суждение *A* «Во всех капиталистических государствах средства производства принадлежат всему народу» — ложно.

2. *Умозаключение модальности.* В основе этих умозаключений — отношение модальности суждений. При формулировании одной посылки таких умозаключений мы опираемся на одно из следующих положений:

1) что необходимо, то действительно;
2) что необходимо, то возможно;
3) что действительно, то возможно;
4) что невозможно, то не действительно;
5) что невозможно, то не необходимо;
6) что недействительно, то не необходимо.

Другой посылкой в таких умозаключениях является категорическое суждение, одинаковое по виду модальности с основанием первой посылки. Отсюда следующие схемы умозаключений:

1) S необходимо должно быть $P \to S$ действительно есть P.
S необходимо должно быть P.

S (действительно) есть P.

2) S необходимо должно быть $P \to S$ может быть P.
S необходимо должно быть P.

S может быть P.

3) S не есть $P \to S$ не необходимо должно быть P.
S не есть P.

S не необходимо должно быть P.

4) S есть $P \to S$ может быть P.
S есть P.

S может быть P.

5) S не может быть $P \to S$ не есть P.
S не может быть P.

S не есть P.

6) S не может быть $P \to S$ не должно быть P.
S не может быть P.

S не должно быть P.

Примеры, соответствующие этим схемам:

1) S необходимо должно быть $P \to S$ действительно есть P.
Сумма углов треугольника (S) необходимо должна быть равной двум прямым углам (P).

Сумма углов треугольника действительно равна двум прямым углам.

2) S необходимо должно быть $P \to S$ может быть P.
Сумма углов треугольника S необходимо должна быть равной двум прямым углам (P).

Сумма углов треугольника может быть равной двум прямым углам.

3) S не есть $P \to S$ не необходимо должно быть P.
Число жителей данного города (S) не равно миллиону (P).

Число жителей данного города не необходимо должно быть равно миллиону.

4) S есть $P \to S$ может быть P.
Глагол (S) есть часть речи, изменяющаяся по временам.

Глагол может изменяться по временам.

5) S не может быть $P \to S$ не есть P.
Растение (S) не может быть живущим без влаги (P).

Растение не есть живущее без влаги.

6) S не может быть $P \to S$ не должно быть P.
Растение (S) не может жить без влаги.

Растение не должно жить без влаги.

3. *Умозаключение превращения* основано на изменении качества суждения и на том факте, что истинным является утверждение о совместимости субъекта суждения либо с данным понятием P, либо с противоречащим ему понятием не-P. Это значит, что они основаны на следующих положениях, выражающих свойства противоречащих понятий:

а) S есть $P \to S$ не есть не-P;
б) S не есть $P \to S$ есть не-P;
в) S есть не-$P \to S$ не есть P;
г) S не есть не-$P \to S$ есть P.

Отсюда схемы умозаключения превращения:

(1) S есть $P \to S$ не есть не-P.
S есть P.

S не есть не-P.

Пример:

S есть $P \to S$ не есть не-P.
Золото (S) есть металл (P).

Золото не есть не-металл.

(2) S не есть $P \to S$ есть не-P.
S не есть P.

S есть не-P.

Пример:

S не есть $P \to S$ есть не-P.
Золото (S) не есть жидкость (P).

Золото есть не жидкость.

(3) S есть не-$P \to S$ не есть P.
S есть не-P.

S не есть P.

Пример:

S есть не-$P \to S$ не есть P.
Ртуть (S) является нетвердой (P).
___
Ртуть не является твердой.

(4) S не есть не-$P \to S$ есть P.
S не есть не-P.
___
S есть P.

Пример:

S не есть не-$P \to S$ есть P.
Капиталисты не суть не-эксплуататоры.
___
Капиталисты суть эксплуататоры.

4. *Умозаключение обращения* основано на законе обращения суждений. В одной посылке этих умозаключений выражается зависимость между отношением субъекта к предикату и предиката к субъекту, т. е. зависимость между категорическими суждениями одинаковой материи, отличающимися местоположением ее частей — субъекта и предиката.

Другими словами, в ней утверждается одно из следующих соотношений:

(1) $S\ a\ P \to P\ i\ S$;
(2) $S\ e\ P \to P\ e\ S$;
(3) $S\ i\ P \to P\ i\ S$,

где a является знаком общеутвердительного суждения, e—общеотрицательного, а i — частноутвердительного.

При объемной интерпретации отношений субъекта и предиката в суждении в каждом из трех соотношений дается ответ на вопрос об отношении объема предиката к объекту субъекта в одном из трех видов категорических суждений: в суждениях A, E и I.

Определенный ответ на вопрос об отношении предиката к субъекту в частноотрицательном суждении невозможен: утверждаемое в нем наличие части объема субъекта *вне* объема предиката совместимо с любой из трех возможных ситуаций: 1) с возможностью включения *всего* объема предиката в объем субъекта, 2) с возможностью включения только части объема предиката в объем субъекта и 3) с несовместимостью объемов субъекта и предиката. Наглядно представить это можно в виде соответствующих круговых схем, которые даны в главе о суждении.

Вторая посылка в умозаключениях обращения является утверждением о тождестве структуры некоторого конкретного суждения со структурой основания одного из вышеуказанных соотношений. Отсюда следующие схемы этих умозаключений:

$$(1)\ \frac{\begin{array}{l} S\ a\ P \to P\ i\ S \\ S\ a\ P \end{array}}{P\ i\ S};\quad (2)\ \frac{\begin{array}{l} S\ e\ P \to P\ e\ S \\ S\ e\ P \end{array}}{P\ e\ S};\quad (3)\ \frac{\begin{array}{l} S\ i\ P \to P\ i\ S \\ S\ i\ P \end{array}}{P\ i\ S}.$$

Примеры, соответствующие этим схемам:

(1) Если дано суждение $S\ a\ P$, то дано неявно суждение $P\ i\ S$.
Дано суждение $S\ a\ P$ «Все цветы — растения».

Дано неявно суждение $P\ i\ S$ «Некоторые растения — цветы».

(2) Если дано суждение $S\ e\ P$, то дано неявно суждение $P\ e\ S$.
Дано суждение $S\ e\ P$ «Ни один прямоугольный треугольник не равносторонний».

Дано неявно суждение $P\ e\ S$ «Ни один равносторонний треугольник не прямоугольный».

(3) Если дано суждение $S\ i\ P$, то дано неявно суждение $P\ i\ S$.
Дано суждение $S\ i\ P$ «Некоторые металлы не тонут в воде».

Дано неявно суждение «Некоторые не тонущие в воде вещества суть металлы».

5. *Умозаключение противопоставления предикату.* В умозаключениях данного вида заключениями являются суждения, отвечающие на вопрос об отношении понятия, противоречащего предикату, к субъекту исходного суждения. Они основаны, с одной стороны, на том, что из двух противоречащих понятий одно и *только* одно необходимо присуще любому субъекту в качестве предиката, а с другой стороны, на утверждении, что если весь объем или часть объема субъекта содержится в объеме предиката, то часть объема предиката необходимо содержится в объеме субъекта. Следовательно, они основаны на следующих соотношениях, каждое из которых является одной из посылок в разновидностях этих умозаключений:

$$(1)\ S\ a\ P \rightarrow \text{не-}P\ e\ S;$$
$$(2)\ S\ e\ P \rightarrow \text{не-}P\ i\ S;$$
$$(3)\ S\ o\ P \rightarrow \text{не-}P\ i\ S.$$

Общий смысл этих соотношений состоит в том, что если дано суждение, которое слева от знака «→», то неявно дано суждение, которое справа от знака «→». Это последнее получается неизбежно, если осуществить превращение суждения, стоящего слева от знака «→», а суждение, полученное в результате превращения, обратить,

Если дано частноутвердительное суждение $S\,i\,P$, то невозможно будет определенно ответить на вопрос об отношении понятия, противоречащего предикату, к субъекту этого суждения. В частноутвердительном суждении говорится, что часть объема входит в объем предиката, а это логически совместимо как с утверждением, что другая часть входит в объем понятия, противоречащего предикату данного суждения, так и с тем, что она не входит в объем этого понятия.

Вторая посылка в умозаключениях противопоставления предикату является утверждением того, что дано суждение определенной материи, тождественное по структуре с суждением, которое слева от знака «→», а в заключении утверждается, что дано суждение, тождественное по структуре с суждением, стоящим справа от знака «→». Отсюда следующие схемы умозаключений противопоставления предикату:

1) $\dfrac{\begin{array}{l} S\ a\ P \rightarrow \text{не-}P\ e\ S \\ S\ a\ P \end{array}}{\text{не-}P\ e\ S}$; 2) $\dfrac{\begin{array}{l} S\ e\ P \rightarrow \text{не-}P\ i\ S \\ S\ e\ P \end{array}}{\text{не-}P\ i\ S}$;

3) $\dfrac{\begin{array}{l} S\ o\ P \rightarrow \text{не-}P\ i\ S \\ S\ o\ P \end{array}}{\text{не-}P\ i\ S}$.

Соответствующие примеры:

1) Если дано суждение $S\ a\ P$, то неявно дано суждение не-$P\ e\ S$
Дано суждение $S\ a\ P$ «Все розы — цветы».

Дано неявно суждение не-$P\ e\ S$ «Никакие не-цветы не есть розы».

2) Если дано суждение $S\ e\ P$, то дано неявно суждение не-$P\ i\ S$
Дано суждение $S\ e\ P$ «Ни одна птица не есть млекопитающее»

Дано неявно суждение не-$P\ i\ S$ «Некоторые немлекопитающие суть птицы».

3) Если дано суждение $S\ o\ P$, то неявно дано суждение не-$P\ i\ S$
Дано суждение $S\ o\ P$ «Некоторые рыбы не летают».

Дано неявно суждение «Некоторые нелетающие существа — рыбы».

§ 30. Простой категорический силлогизм

1. **Определение и строение категорического силлогизма.** *Простой категорический силлогизм есть умозаключение об отношении двух терминов на основании их отношения к третьему термину.* Термины, между которыми устанавливается отношение, называются крайними. Один из них называется субъектом и обозначается символом S, а другой—предикатом и обозначается символом P. Первый из них называется также меньшим термином, а второй — бóльшим. Третий термин называется средним и обозначается символом M.

Простой категорический силлогизм состоит из трех категорических суждений: два из них являются посылками, а третье— заключением. В одной посылке формулируется отношение P к M. Она называется бóльшей посылкой. Во второй посылке, которая называется меньшей, дано отношение S к M. В заключении высказывается отношение S к P. Следовательно, если обозначить отношение между терминами посредством буквы R, то структура силлогизма получит следующее символическое выражение:

$$\frac{\begin{array}{c} M\ R\ P \\ S\ R\ M \end{array}}{S\ R\ P}.$$

Но эта схема является общей для правильных силлогизмов, в которых заключение получается с необходимостью, и для неправильных. В этом можно убедиться, подставив вместо R отношение «содержится в», которое высказывается в любом утвердительном суждении, и взяв в одном случае общеутвердительные суждения в качестве обеих посылок, в другом в качестве меньшей посылки — общеутвердительное суждение, а в качестве большей — частноутвердительное. В результате из первого сочетания посылок с необходимостью будет следовать заключение, а во втором — нет. Рассмотрим эти сочетания:

(1) $\dfrac{\begin{array}{l} \text{Все } M \text{ содержатся в } P. \\ \text{Все } S \text{ содержатся в } M. \end{array}}{\text{Все } S \text{ содержатся в } P.}$; (2) $\dfrac{\begin{array}{l} \text{Некоторые } M \text{ содержатся в } P. \\ \text{Все } S \text{ содержатся в } M. \end{array}}{?}$.

Во втором случае не противоречат посылкам утверждения о том, что весь объем понятия S содержится в объеме понятия P, что только часть объема понятия S содержится в объеме понятия P и что весь объем понятия S содержится вне объема понятия P. Следовательно, здесь из посылок *определенного* заключения не вытекает. Невозможно будет вывести определенное заключение как из первого, так и из второго сочетания посылок, если отношение «содержится в» заменить отношением «не содержится в», т. е. если обе посылки будут отрицательными суждениями. Это хорошо видно на круговых схемах, изображающих отношения между объемами понятий P и M.

Если определенного заключения не следует из посылок, то круги S и P при определенном их отношении к кругу M могут занимать различные положения один относительно другого: включения, пересечения, исключения. Отсюда видно, что в этих случаях из посылок не вытекает никакого определенного заключения. Если же определенное заключение следует из посылок, то круги S и P при определенном их отношении к кругу M могут занимать *лишь одно* какое-либо положение один относительно другого. Опираясь на этот факт, можно определить все правильные разновидности (модусы) категорического силлогизма и представить их наглядно в виде «таблицы отбора правильных модусов категорического силлогизма» (рис. 16), руководствуясь следующими принципами ее построения:

1) сначала во втором столбце схемы изобразить в круговых схемах всевозможные отношения между понятиями M и P, которые могут быть выражены в суждениях A, E, I, O;

Таблица отбора правильных модусов категорического силлогизма

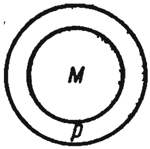
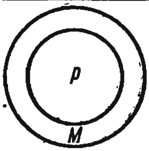
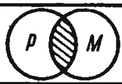
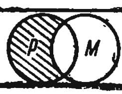
1	2	3	4	5
	Всевозможные отношения терминов в большей посылке	Отношения терминов в меньшей посылке, необходимые для заключения	Заключение	Отношения терминов в меньшей посылке, исключающие возможность заключения
1	MaP 	SaM	SaP	SeM, SoM, MeS, MoS, так как то, что вне круга M, может быть, как в круге, так и вне его.
		SiM	SiP	
		MaS	SiP	
		MiS	SiP	
2	MeP 	SaM	SeP	SeM, SoM, MeS, MoS – по той же причине, что и в предыдущем случае.
		SiM	SoP	
		MaS	SoP	
		MiS	SoP	
3	MiP 	MaS	SiP	Все, кроме MaS.
4	MoP 	MaS	SoP	Все, кроме MaS
5	PaM 	SeM	SeP	SaM, SiM, MoS, MiS
		SoM	SoP	
		MaS	SiP	
		MeS	SeP	
6	PiM 	MaS	SiP	Все, кроме SiP
7	PeM 	SaM	SeP	SeM, SoM, MeS, MoS.
		SiM	SoP	
		MaS	SoP	
		MiS	SoP	
8	PoM 	Нет	Нет	Все без исключения

Рис. 16

2) сопоставить каждое из возможных положений кругов M и P относительно друг друга с каждым из восьми возможных положений кругов S и M относительно друг друга. В результате этого сопоставления выявляются такие отношения терминов в меньшей посылке, которые в сочетании с определенным отношением терминов M и P обусловливают определенные отношения S и P. Все такие отношения кругов M и S фиксируются затем в третьем вертикальном столбце в том же самом горизонтальном делении, в котором фиксируется соответствующее отношение терминов в бо́льшей посылке;

3) в четвертом столбце записывается символическое выражение вида суждения, которое является заключением; тут же изображается отношение кругов S и P;

4) в том же горизонтальном делении в пятом столбце по вертикали отмечаются отношения терминов в меньшей посылке, которые в сочетании с данной бо́льшей посылкой исключают возможность определенного заключения.

На таблице видно, что: (1) всего существует 19 правильных разновидностей (модусов) категорического силлогизма; (2) из восьми возможных отношений терминов в большей посылке первые семь в сочетании с определенными отношениями терминов в меньшей посылке обусловливают определенные виды заключений, а восьмое отношение терминов в большей посылке в сочетании с любым отношением терминов в меньшей посылке исключает возможность определенного заключения. На таблице также видно, что в четырех случаях из девятнадцати заключение является общим суждением: в одном случае — общеутвердительным суждением, а в остальных трех случаях — общеотрицательным.

На основании того, что из истинности общего суждения следует истинность частного суждения путем замены общего суждения в заключении частным можно образовать дополнительно четыре модуса, которые принято называть ослабленными. Но так как в познавательном отношении общее суждение ценнее частного, то в практике обычно не возникает потребности в ослабленных модусах.

2. **Фигуры категорического силлогизма.** Все 19 правильных модусов силлогизма принято делить на виды в зависимости от положения термина M в каждой из двух посылок. Эти виды называются фигурами категорического силлогизма. Так как в каждой из двух посылок имеется два возможных места — места субъекта и предиката, — одно из которых может быть занято термином M, то всего фигур в категорическом силлогизме четыре. Каждая из них имеет следующий вид (предполагается, что бо́льшая посылка ставится первой, а меньшая — второй):

I фигура	II фигура	III фигура	IV фигура
$M\ P$	$P\ M$	$M\ P$	$P\ M$
$S\ M$	$S\ M$	$M\ S$	$M\ S$

В первых четырех горизонталях таблицы отбора правильных модусов силлогизма четыре модуса являются модусами первой фигуры и шесть — модусами третьей фигуры. В 5—7-й горизонталях — четыре модуса второй фигуры и пять модусов четвертой фигруы. По отдельным фигурам модусы распределяются следующим образом:

	Модусы I фигуры	Модусы II фигуры	Модусы III фигуры	Модусы IV фигуры
(1)	$\dfrac{M\,a\,P \\ S\,a\,M}{S\,a\,P}$	$\dfrac{P\,e\,M \\ S\,a\,M}{S\,e\,P}$	$\dfrac{M\,a\,P \\ M\,a\,S}{S\,i\,P}$	$\dfrac{P\,a\,M \\ M\,a\,S}{S\,i\,P}$
(2)	$\dfrac{M\,e\,P \\ S\,a\,M}{S\,e\,P}$	$\dfrac{P\,a\,M \\ S\,e\,M}{S\,e\,P}$	$\dfrac{M\,i\,P \\ M\,a\,S}{S\,i\,P}$	$\dfrac{P\,a\,M \\ M\,e\,S}{S\,e\,P}$
(3)	$\dfrac{M\,a\,P \\ S\,i\,M}{S\,i\,P}$	$\dfrac{P\,e\,M \\ S\,i\,M}{S\,o\,P}$	$\dfrac{M\,a\,P \\ M\,i\,S}{S\,i\,P}$	$\dfrac{P\,i\,M \\ M\,a\,S}{S\,i\,P}$
(4)	$\dfrac{M\,e\,P \\ S\,i\,M}{S\,o\,P}$	$\dfrac{P\,a\,M \\ S\,o\,M}{S\,o\,P}$	$\dfrac{M\,e\,P \\ M\,a\,S}{S\,o\,P}$	$\dfrac{P\,e\,M \\ M\,a\,S}{S\,o\,P}$
(5)			$\dfrac{M\,o\,P \\ M\,a\,S}{S\,o\,P}$	$\dfrac{P\,e\,M \\ M\,i\,S}{S\,o\,P}$
(6)			$\dfrac{M\,e\,P \\ M\,i\,S}{S\,o\,P}$	

Примеры модусов I фигуры:

(1) Всякая классовая борьба есть борьба политическая.
Борьба рабочих за победу коммунизма — классовая.

Борьба рабочих за победу коммунизма является политической.

(2) Ни одна планета не светит собственным светом.
Юпитер — планета.

Юпитер не светит собственным светом.

(3) Все металлы электропроводны.
Некоторые жидкости — металлы.

Некоторые жидкости электропроводны.

(4) Ни в одной капиталистической стране не существует планового хозяйства.
Некоторые европейские страны — капиталистические.

В некоторых европейских странах не существует планового хозяйства.

Примеры модусов II фигуры:

(1) Ни одна империалистическая война не есть справедливая.
Война СССР против фашистской Германии — справедливая.

Война СССР против фашистской Германии не была империалистической.

(2) Всякий простой категорический силлогизм имеет три термина.
Данное умозаключение не имеет трех терминов.

Данное умозаключение не является простым категорическим силлогизмом.

(3) Все металлы электропроводны.
Некоторые тела не электропроводны.

Некоторые тела не есть металлы.

(4) Ни одна справедливая война не есть империалистическая.
Данная война — империалистическая.

Данная война не есть справедливая.

Примеры модусов III фигуры:

(1) Все капиталисты — эксплуататоры.
Все капиталисты — люди.

Некоторые люди — эксплуататоры.

(2) Некоторые партии выражают интересы капиталистов.
Все партии — политические организации.

Некоторые политические организации выражают интересы капиталистов.

(3) Все адвокаты — юристы.
Некоторые адвокаты — шахматисты.

Некоторые шахматисты — юристы.

(4) Ни одна птица не есть летучая мышь.
Все птицы имеют крылья.

Некоторые крылатые существа не летучие мыши.

(5) Некоторые прокуроры не шахматисты.
Все прокуроры — юристы.

Некоторые юристы не шахматисты.

(6) Ни одна роза не есть дерево.
Все розы — растения.

Некоторые растения не являются деревьями.

Примеры модусов IV фигуры:

(1) Все квадраты — параллелограммы.
Все параллелограммы — четырехугольники.

Некоторые четырехугольники — квадраты.

(2) Все кашалоты — киты.
Ни один кит не рыба.

Ни одна рыба не кашалот.

(3) Некоторые колхозники — Герои Социалистического Труда.
Все Герои Социалистического Труда — орденоносцы.

Некоторые орденоносцы — колхозники.

(4) Ни один аспирант не студент.
Все студенты обязаны сдавать экзамены.

Некоторые лица, обязанные сдавать экзамены, — не аспиранты.

(5) Ни одна птица не есть млекопитающее.
Все млекопитающие — позвоночные.

Некоторые позвоночные — не птицы.

3. **Общий обзор других особенностей фигур категорического силлогизма.** В модусах каждой фигуры имеются некоторые общие черты, характеризующие фигуру в целом, а также особая совокупность видов суждений, которые являются заключениями.

Первая фигура. В модусах этой фигуры обнаруживаются следующие черты: 1) бóльшая посылка является общим суждением; 2) меньшая посылка является всегда утвердительным суждением; 3) каждый из четырех видов суждений (*A, E, I, O*) в одном из модусов этой фигуры является заключением.

Во всех других фигурах суждение *A* не может быть заключением. В силу этого первая фигура имеет наибольшую познавательную ценность, ибо, например, законы науки всегда формулируются в суждениях *A*. Особенностью этой фигуры является также то, что в ней частное явление подводится под общее положение. Она обладает тем преимуществом по сравнению с другими фигурами, что только в ее модусах сразу, непосредственно видно соответствие умозаключения *аксиоме* силлогизма. Эта аксиома известна под именем *dictum de omni et nullo,* если имеют в виду отношение объемов трех понятий силлогизма. Если имеют в виду отношение тех же понятий по содержанию, то эта аксиома формулируется следующим образом: *Nota notae est nota rei, repugnans notae repugnat rei* (признак признака вещи есть признак самой вещи).

Содержание аксиомы, если ее рассматривать в качестве положения, выражающего отношение объемов понятий в силлогизме, можно выразить словами: *«Если объем одного понятия содержится в объеме второго, а объем второго содержится в объеме третьего понятия, то объем первого находится в объеме третьего; если же объем одного понятия содержится в объеме второго понятия, а объем второго — вне объема третьего понятия, то и объем первого понятия находится вне объема третьего понятия».*

Если аксиому рассматривать в качестве положения, в котором выражается отношение понятий в силлогизме по содержанию, то смысл ее можно выразить в словах: *«Если содержание одного понятия является частью содержания второго понятия, а содержание второго — частью содержания третьего, то содержание первого понятия составляет часть содержания третьего; если же содержание одного понятия несовместимо с содержанием второго, а содержание второго понятия является частью содержания третьего, то содержание первого понятия несовместимо с содержанием третьего понятия».*

Вторая фигура, как это видно из сравнения ее модусов, характеризуется следующими чертами: 1) бóльшая посылка в ней — общее суждение; 2) одна из посылок — отрицательное суждение, вследствие чего и заключение тоже — отрицательное суждение.

Посредством этой фигуры отвергаются ложные подчинения. Чтобы отвергнуть ложное подчинение, требуется показать, что утверждаемое в нем включение какого-либо класса предметов S в класс P не соответствует действительности. В этом случае мы указываем на то, что какой-либо признак M присущ всем предметам класса P и не присущ предметам класса S, откуда следует ложность утверждения о том, что предметы класса S содержатся в классе P. Оправдательные юридические приговоры строятся по этой фигуре.

Третья фигура в результате сравнения ее модусов обнаруживает следующие черты: меньшая посылка в ней является утвердительным суждением, а заключение — частное суждение. Она применяется для доказательства исключений из общего правила. Допустим, требуется опровергнуть утверждение о том, что всем предметам класса S присущ признак P. В этом случае для опровержения этого утверждения надо указать такой предмет M из класса S, который не имеет признака P. Например, если кто-либо стал бы утверждать, что все металлы твердые, то для опровержения такого утверждения можно построить такой силлогизм по третьей фигуре: «Ртуть не твердая, ртуть есть металл. Следовательно, некоторые металлы не твердые». Из истинности последнего утверждения следует ложность общего опровергаемого положения.

Четвертая фигура характеризуется следующими чертами: 1) если бóльшая посылка в ней — утверднтельное суждение, то меньшая посылка — общее суждение; 2) если одна посылка отрицательная, то бóльшая посылка является общим сужденнем.

Аристотель в своих сочинениях рассматривал только три первые фигуры, о четвертой фигуре он не упоминает. Ее ввел в логику знаменитый в древности врач Клавдий Гален (130—200 гг.), занимавшийся философией. До того как Гален выделил ее в самостоятельную фигуру, ученики Аристотеля Теофраст и Эвдем исследовали пять ее правомерных модусов.

Многие логики считают данную фигуру искусственной на том основании, что все доказательства, ведущиеся в соответствии с обычными способами выражения, не получают такой формы. Но если бы это было и действительно так, то для полноты теории силлогизма она все равно заслуживала бы упоминания. Но по четвертой фигуре доказательство нередко осуществляется на практике. Пример умозаключения по этой фигуре:

Ни один примат не птица.
Все птицы — позвоночные.

Некоторые позвоночные не приматы.

4. Сведение модусов II, III и IV фигур к модусам I фигуры. Все четыре вида заключения — *A, E, I, O,* — которые встречаются в категорическом силлогизме, могут быть получены по первой фигуре, и все модусы остальных фигур могут быть преобразованы посредством определенных операций в ее модусы. Эти преобразования иногда требуется осуществить потому, что только в первой фигуре, как отмечалось выше, все модусы непосредственно соответствуют аксиоме силлогизма. Следовательно, только в ней наиболее наглядно и убедительно демонстрируется следование заключения из посылок.

Средствами преобразования 13 модусов II, III и IV фигур в модусы первой фигуры являются обращение суждений, составляющих модус силлогизма, и перестановка посылок, т. е. изменение их положения. В одних случаях применяется одно из этих средств, а в других — оба.

В необходимости применения этих средств в целях указанного преобразования модусов мы убеждаемся как только обращаем внимание на различное положение среднего термина в разных фигурах. Во второй и третьей фигурах без обращения одной из посылок невозможно изменить местоположение среднего термина в соответствии с его местоположением в первой фигуре. Обращение при этом будет либо чистым, либо с ограничением — в зависимости от количества и качества обращаемой посылки.

Если меньшая посылка во второй фигуре является отрицательным суждением, то для преобразования ее модуса в модус первой фигуры, кроме обращения посылки, требуется также перестановка посылок, так как в первой фигуре меньшая посылка всегда является утвердительным суждением. Если в результате указанных действий средний термин будет занимать положение, требуемое первой фигурой, но заключение будет иметь форму *P* есть (не есть) *S*, то к нему надо применить операцию обращения.

В четвертой фигуре преобразование модусов с утвердительной большей посылкой следует начать с перестановки посылок, так как в результате этой операции местоположение среднего термина и качество меньшей посылки будут соответствовать характеристике первой фигуры. Если бо́льшая посылка в четвертой фигуре отрицательная, то она подлежит обращению, после чего обращается и меньшая посылка. Если заключение из посылок будет в форме *P* есть (не есть) *S*, то оно также должно подвергнуться обращению.

Модус 2-й фигуры *AOO* и модус 3-й фигуры *OAO* не преобразуются в модусы 1-й фигуры посредством обращения посылок и перестановки посылок. Они сводятся к модусам первой фигуры при помощи метода *reductio ad absurdum* (приведение к нелепости). Применительно к модусу *AOO* он состоит в том, что сначала допускается истинность суждения, противоречащего заключению данного модуса, затем это суждение соединяется с допущенной ранее большей посылкой. Из этого соединения будет следовать утверждение, противоречащее меньшей посылке, откуда будет следовать, что заключение рассматриваемого модуса является верным. Аналогичным образом применяется этот метод к модусу *OAO*.

В XIII столетии для запоминания всех девятнадцати модусов и для приведения их к первой фигуре были составлены следующие мнемонические стихи, в которых первая строчка перечисляет модусы первой, основной, или совершенной, как называл ее Аристотель, фигуры,

Barbara, Celarent, Darii, Ferioque prioris;
Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundae;
Tertia Darapti, Disamis, Datisi, Felapton,
Bocardo, Ferison habet; quarta insuper addit.
Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison.

В этих стихах начальные буквы названных модусов указывают на тот модус первой фигуры, к которому надо привести данный модус. Так, *Felapton* приводится к *Ferio*, *Disamis* — к *Darii*.

В *Baroco* и *Bocardo B* указывает на то, что следует употребить *Barbara* для приведения к нелепости предположения о неверности заключения в этих модусах.

Буква *s* обозначает, что суждение, обозначенное гласной, после которой она стоит, подлежит простому обращению. Буква *m* указывает на то, что посылки надо поменять местами. Буква *p* обозначает, что суждение, обозначенное гласной, после которой оно стоит, подлежит обращению с ограничением. Наконец, буква *c* указывает на то, что данный модус сводится к модусу первой фигуры при помощи метода приведения к нелепости.

5. **Правила категорического силлогизма.** На основании сравнения модусов категорического силлогизма можно вывести следствия, приложимые ко всем фигурам. Они называются общими правилами категорического силлогизма, которые формулируются следующим образом.

1. В категорическом силлогизме должно быть три и только три термина. Часто вследствие двусмысленности слов за три термина принимаются ошибочно фактически четыре термина.

2. Средний термин должен быть распределен по крайней мере в одной из посылок.

3. Термин не может быть распределен в заключении, если он не распределен в посылках.

4. Из двух отрицательных посылок нельзя вывести заключение.

5. Если одна посылка — отрицательное суждение, то и заключение должно быть отрицательным.

6. Из двух частных посылок нельзя вывести заключение.

7. Если одна посылка является частным суждением, то и заключение должно быть частным.

В средние века в отличие от того способа отбора правильных модусов, который был применен Аристотелем и который в сущности был применен нами выше, был выработан такой способ, который опирается на использование этих правил. Он состоит в том, что из всевозможных модусов исключают те из них, которые противоречат этим правилам.

6. **Основания выведения заключения в категорическом силлогизме.** Категорический силлогизм, как было показано выше, есть умозаключение об отношении двух понятий (S к P) на основании отношения каждого из них к третьему понятию (M). Поэтому во всевозможных общих правилах его и в специальных правилах в каждой из фигур в конечном счете проявляются отношения между объемами и содержаниями понятий, высказываемые в посылках правильного силлогизма. Этими отношениями можно непосредственно руководствоваться в практике мышления, если их выразить в определенных суждениях. Выражение данных отношений сводится к следующим семи положениям:

1) все, что находится в объеме вида (M), то находится в объеме рода (P). Примеры: что пальма, то и дерево; что птица, то и позвоночное;

2) что (P) находится вне объема рода (M), то не содержится и в объеме вида (S). Пример: то, что не форма мышления, то и не силлогизм; то, что не имеет вредных последствий, то и не пьянство;

3) если объем одного понятия (M) содержится в объеме каждого из двух других понятий (S и P), то объемы последних по крайней мере частично совпадают. Если все птицы крылаты и являются позвоночными, то отсюда следует, что объемы понятий «крылаты» и «позвоночные» по крайней мере частично совпадают;

4) если часть объема понятия (S) содержится в объеме понятия вида (M), то эта же часть объема находится в объеме понятия рода (P). Если некоторые колхозники — Герои Социалистического Труда, то эта же часть кохозников является орде-

носцами. Если некоторые политические деятели были поэтами, то они были, следовательно, писателями;

5) если часть объема понятия (S) не содержится в объеме понятия рода (M), то часть его объема не содержится и в объеме понятия вида (P). Если некоторые деревья не имеют ветвей, то они не являются и елями. Если некоторые люди не являются музыкантами, то они не являются и пианистами;

6) если объем какого-либо понятия (P) частично или полностью не содержится в объеме понятия вида (M), он частично не содержится и в объеме понятия рода (S). Если летучие мыши не имеют перьев, то, следовательно, не все млекопитающие имеют перья. Если золото — не жидкость, то следовательно, не все металлы жидкости;

7) если объем какого-либо понятия (S) частично содержится в объеме одного из двух исключающих друг друга понятий (M и P), то он частично находится вне объема другого понятия. Если некоторые лебеди черные, то, следовательно, они не белые. Если некоторые политические деятели призывают к войне с СССР, то, следовательно, они не являются прогрессивными.

7. **Общий тип и логическое значение категорического силлогизма.** Общий тип категорического силлогизма заключается в том, что он есть умозаключение от *общего* к *частному*. Этот его характер, как мы видели, наиболее полно выражен в первой фигуре, которую Аристотель считал основной и совершенным силлогизмом. Всякое умозаключение первой фигуры, а так как все модусы по другим фигурам сводятся к модусам первой фигуры, то, следовательно, и вообще каждое правильное категорическое умозаключение может быть выражено в следующей схеме:

$$M\left\}\begin{matrix}a\,P\\ e\,P\end{matrix}\right.\qquad\begin{matrix}\text{Все растения живые организмы.}\\ \text{Ни одно растение не живет без влаги.}\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}S\ a\\ S\ i\end{matrix}\right\}M\qquad\left.\begin{matrix}\text{Все кипарисы}\\ \text{Некоторые паразиты}\end{matrix}\right\}\text{Растения.}$$

$$\left.\begin{matrix}S\ a\\ S\ i\\ S\ e\\ S\ o\end{matrix}\right\}P\qquad\left.\begin{matrix}\text{Все кипарисы}\\ \text{Некоторые паразиты}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\text{Живые организмы.}\\ \text{Не живут без влаги.}\end{matrix}$$

Но если в категорическом силлогизме совершается вывод частного из общего, то возникает вопрос: представляет ли выведение заключения в силлогизме какой-либо новый шаг в познании. В истории логики случалось, что некоторые представители этой науки отвечали на данный вопрос отрицательно. Попытки обоснования отрицательного ответа на этот вопрос, которые предпринимал, в частности, английский философ Дж. Ст. Милль, сводились к следующему. В том, что общее положение, служащее бо́льшей посылкой силлогизма, является истинным, мы убеждаемся из того, что оно подтверждается в каждом отдельном случае, который может быть подведен под него. А это значит-де, что общее положение само следует из *частных случаев.* Но если это так, то, по-видимому, будет порочный круг, если выводить из него частное. Например, чтобы знать о том, что все планеты сплющены, надо предварительно удостовериться опытным путем относительно каждой планеты, что она сплющена. В противном случае, скажем, утверждение о том, что Плутон сплющен, будет *предположением*, а не следствием большей посылки.

Если в заключении утверждается, что опытным путем еще не познано (например, что после зимы наступит весна), то и тогда, согласно этой точке зрения, заключение делается не от общего к частному, а от известных, полученных в результате неполного наведения частных случаев к еще не познанному частному случаю.

Представители этой точки зрения исходят из того, что для опытного знания *частное* существует раньше *общего*, причем общность здесь понимается как суммирование частных случаев, установленных наблюдением. Такая всеобщность не заключает в себе никакой необходимости. Например, наблюдение показывает, что вороны — черные, хинин излечивает малярию, но наблюдение не показывает, почему цвет перьев у ворон черный и почему хинин способен излечивать малярию.

Но если всеобщность не заключает в себе необходимости, то всякая необходимость, закономерность есть всеобщность. Поэтому устанавливать общее положение, которое может стать большей посылкой силлогизма, не обязательно путем наблюдения всех частных фактов, подходящих под данное положение, а достаточно для его установления привести основания, доказывающие его необходимость. И поскольку именно такое положение становится большей посылкой силлогизма, то, подводя под него частный случай, мы заключаем к такому частному случаю, который вовсе не принимался во внимание при формулировании общего положения. Поэтому шаг вперед в познании действительности в результате таких умозаключений очевиден и неоспорим.

Но даже тогда, когда мы выводим из общего положения частный случай, известный из наблюдения до вывода, происходит немалое приращение знания, так как до вывода мы знали о простом факте существования этого случая, а после вывода получаем знания о его необходимости. Например, тот же факт, что все планеты сплющены, конечно, может быть установлен наблюдением каждой планеты, а может быть обоснован всей совокупностью условий, из которых с необходимостью вытекает такая форма планет. Но так как задача всякой науки состоит в установлении законов, которым подчинены те или другие явления, и в превращении эмпирических данных в необходимые, выведенные из законов, то понятно, что без силлогизма наука невозможна.

Наконец, если положение о всеобщности, установленное эмпирическим путем, используется в качестве большей посылки людьми, которые сами не устанавливали этого положения, то для них соответствующее умозаключение будет служить средством расширения знаний.

§ 31. Сокращенные, сложные и сложносокращенные категорические силлогизмы

1. *Энтимема.* Во всех сферах мыслительной деятельности невозможно обойтись без силлогизма, но он далеко не всегда применяется в полной форме, в которой сформулированы явно все его части. Пожалуй, гораздо чаще встречается неполная форма силлогизма, которую в логике принято называть энтимемой. В ней одно из суждений — либо бóльшая посылка, либо меньшая, либо заключение — не имеет особого языкового выражения, а является подразумеваемым. Следовательно, всякая энтимема состоит из двух и только из двух суждений, которые в случае необходимости могут быть использованы в качестве основания для словесного или символического выражения третьего суждения.

Для этого в двух суждениях энтимемы категорического силлогизма должны содержаться все три термина (понятия) последнего: S, M, и P. Если в энтимеме пропускается одна из посылок, то S и P содержатся в заключении, и если при этом высказывается бóльшая посылка, то в ней содержатся M и P. Если высказывается меньшая посылка, то она содержит термины S и M. Если же в энтимеме пропускается заключение, то в большей посылке находятся M и P, а в меньшей — S и M.

Таким образом, имеется три вида энтимем, каждый из которых соответствует одной из следующих схем, при условии, что соответствующий силлогизм составлен по первой фигуре:

1) энтимема с пропущенной большей посылкой:

$$\frac{S\ R\ M}{S\ R\ P}$$

Учение Маркса всесильно,
потому что оно верно.

2) энтимема с пропущенной меньшей посылкой:

$$\frac{M\ R\ P}{S\ R\ P}$$

Учение Маркса всесильно,
потому что всякое верное
учение всесильно.

3) энтимема с пропущенным заключением:

$$\frac{\begin{array}{c} M\ R\ P \\ S\ R\ M \end{array}}{}$$

Всякое верное учение всесильно.
Учение Маркса является верным.

Энтимемами бывают не только силлогизмы первой фигуры, но и силлогизмы по другим фигурам, причем энтимема по какой-либо фигуре может быть восстановлена в полный силлогизм той же самой фигуры. Если речь идет об энтимеме 3), то восстановление ее в полный силлогизм состоит просто в выведении заключения из посылок. Восстановление же энтимемы 1) состоит в образовании большей посылки из терминов M и P, а восстановление энтимемы 2) — в образовании меньшей посылки из терминов S и M.

Для восстановления энтимем 1) и 2) в полный силлогизм мы прежде всего определяем ее фигуру, что достигается в энтимеме 1) на основании положения среднего термина в имеющейся в ней посылке, а в энтимеме 2) — на основании положения среднего термина в посылке и качества последней. Как известно, посылка в энтимеме 2) соответствует схеме: $S—M$, что является общим признаком меньшей посылки как для первой, так и для второй фигур силлогизма, но отрицательным суждением оно может быть только во второй фигуре. Если же имеющаяся в энтимеме посылка $S—M$ является утвердительным суждением, то это значит, что в данной энтимеме отсутствует признак, указывающий на принадлежность ее к определенной фигуре. Следовательно, такая энтимема может быть восстановлена с одинаковым правом как в полный силлогизм первой фигуры, так и в полный силлогизм второй фигуры.

Превращение энтимемы в полный силлогизм бывает нужным на практике: 1) для установления недоказанности истинности заключения, которое выводится в энтимеме из посылок, из которых явно несформулированная посылка — ложная. В этом случае для того, чтобы рассмотреть подразумеваемую посылку с точки зрения истинности, ее необходимо выразить явно. Допустим, кто-либо утверждает: «Данное существо — не млекопитающее, так как оно летает». Здесь утверждение, что данное существо не млекопитающее, обосновывается, с одной стороны, тем, что данное существо не летает, с другой стороны — явно не высказанным утверждением о том, что ни одно млекопитающее не летает, которое является ложным. Чтобы убедиться в его ложности, а следовательно, в непригодности в целях обоснования другого утверждения, мы должны сформулировать его явно;

2) для установления истинности заключения путем установления, что оно вытекает из истинных посылок. В этом случае опять не обойтись без явного формулирования пропущенной посылки.

2. *Полисиллогизмы,* или сложные силлогизмы, являются соединениями нескольких простых силлогизмов. Хотя в принципе они могут быть составлены разными способами и по разным фигурам, но наиболее важны в логическом отношении те из них, в которых заключение одного простого силлогизма (просиллогизма) становится посылкой для другого (эписиллогизма).

Если заключение одного силлогизма становится *большей* посылкой для другого силлогизма, то полисиллогизм называется прогрессивным, так как в нем мышление осуществляет переход от более общих понятий к менее общим, т. е. к понятиям, имеющим большее содержание. Полисиллогизм называется регрессивным, если в нем заключение одного простого силлогизма становится *меньшей* посылкой для другого.

Вот схемы и примеры полисиллогизмов, каждый из которых состоит из трех простых силлогизмов.

Прогрессивный полисиллогизм	Регрессивный полисиллогизм
$$\begin{array}{ll} & M\ a\ (e)\ P \\ 1) & N\ a\ M \\ \cline{2-2} & N\ a\ (e)\ P \\ 2) & O\ a\ N \\ \cline{2-2} & O\ a\ (e)\ P \\ 3) & S\ a\ (i)\ O \\ \cline{2-2} & S\ a\ (e,\ i,\ o)\ P \end{array}$$	$$\begin{array}{l} S\ a\ (i)\ M \\ M\ a\ N \\ \hline S\ a\ (i)\ N \\ N\ a\ O \\ \hline S\ a\ (i)\ O \\ O\ a\ (e)\ P \\ \hline S\ a\ (e,\ i,\ o)\ P \end{array}$$
Например:	Например:
Организмы разрушаются.	Пальмы — деревья.
Растения организмы.	Деревья — растения.
Растения разрушаются.	Пальмы — растения.
Деревья растения.	Растения — организмы.
Деревья разрушаются.	Пальмы — организмы.
Пальмы — деревья.	Организмы разрушаются.
Пальмы разрушаются.	Пальмы разрушаются.

В первом случае мы имеем ряд понятий *P, M, N, O, S,* в котором объем понятий все время уменьшается, а во втором — ряд понятий *S, O, N, M, P,* в котором объем понятий все время увеличивается.

3. *Сорит* есть вид сложносокращенного силлогизма, образуемый из полисиллогизмов путем исключения из них посылок, являющихся заключениями простых силлогизмов. Следовательно, из рассмотренных выше схем двух полисиллогизмов получаются следующие схемы соритов:

Прогрессивный сорит	Регрессивный сорит
$M - P$	$S - M$
$N - M$	$M - N$
$O - N$	$N - O$
$S - O$	$O - P$
$\overline{S - P}$	$\overline{S - P}$

Регрессивный сорит называется еще аристотелевским — по имени его исследователя, а прогрессивный — гоклениевским — по имени Р. Гокления (1540—1628).

4. *Эпихейрема* — вид сложносокращенного силлогизма, в котором обе посылки являются энтимемами. Схема эпихейремы такова:

M есть (не есть) *P*, так как оно есть (не есть) *N*.
S есть *M*, так как оно есть *O*.

S есть (не есть) *P*.

Например:

Ни одна птица не примат, так как ни одна птица не млекопитающее.
Данные особи — птицы, так как они имеют перьевой покров.

Данные особи не приматы.

Каждая эпихейрема может быть превращена в сорит, если ее посылки превратить в полные силлогизмы и расположить их определенным образом.

§ 32. Условные, разделительные и условно-разделительные силлогизмы

1. *Условные силлогизмы.* Условными силлогизмами называются такие, в которых либо одна, либо обе посылки — условные суждения.

а) Условный силлогизм, в котором обе посылки представляют собой условные суждения, называют обычно чисто-условным. Он соответствует схеме:

Если *A*, то *B*.
Если *B*, то *C*.

Следовательно, если *A*, то *C*.

Пример:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Если тело подвергается трению, то оно нагревается.}\\ \text{Если тело нагревается, то оно расширяется.}\end{array}}{\text{Если тело подвергается трению то оно расширяется.}}$$

Как легко заметить, в этой схеме часть суждения, обозначенная символом *B*, в первой посылке является следствием, а во второй — основанием. Эта часть, не входя в заключение, является связующим звеном между частями *A* и *C*. Поэтому аксиому чисто-условного силлогизма часто выражают словами: следствие следствия есть следствие основания.

Еще в средневековье исследователи логики, проведя тщательный анализ всех возможных сочетаний содержательных посылок в чисто-условных умозаключениях и проводя сопоставления этих сочетаний с учетом количества и качества с соответствующими сочетаниями в простых категорических силлогизмах, установили, что в чисто-условных умозаключениях возможно столько же правильных модусов, сколько их установлено было в простых категорических силлогизмах.

Отметим также, что чисто-условные силлогизмы, так же как и категорические, могут составлять целые цепи. Например, вида:

$$\frac{\text{Если } A\text{, то } B\text{; если } B\text{, то } C\text{; если } C\text{, то } D\text{; если } D\text{, то } E.}{\text{Если } A\text{, то } E.}$$

Пример:

Если живое существо обладает членораздельной речью, то оно примат; если оно примат, то оно млекопитающее; если оно млекопитающее, то оно позвоночное; если оно позвоночное, то оно имеет нервную систему. Следовательно, если живое существо обладает членораздельной речью, то оно имеет нервную систему.

б) Условно-категорическими называют такие умозаключения, одна из посылок которых является условным суждением, а другая — суждением категорическим. Вывод в таком умозаключении представляет собой категорическое суждение.

В условно-категорических силлогизмах имеется два правильных модуса: модус *ponens* (или конструктивный), другой — модус *tollens* (или деструктивный).

Модус *ponens* образует заключение от согласия с основанием условной посылки к необходимости соглашаться и с ее следствием. Форма этого модуса такова:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Если } A\text{, то } B.\\ A.\end{array}}{B.}$$

Модус *tollens* является умозаключением от отрицания следствия условной посылки к отрицанию ее основания. Форма этого модуса следующая:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Если } A, \text{ то } B.\\ \text{Не } B\end{array}}{\text{Не } A.}$$

Абстрактно рассуждая, можно сконструировать еще два вида сочетаний посылок:

1) $$\frac{\begin{array}{l}\text{Если } A, \text{ то } B.\\ B.\end{array}}{?}$$

2) $$\frac{\begin{array}{l}\text{Если } A, \text{ то } B.\\ \text{Не } A.\end{array}}{?}$$

Но определенного вывода в этих случаях сделать невозможно, если бо́льшая посылка представляет собой обычное, не выделяющее суждение. Чтобы показать это наглядно, приведем примеры:

1) $$\frac{\begin{array}{l}\text{Если дождь идет, то на улице мокро;}\\ \text{На улице мокро ...}\end{array}}{?}$$

Можно ли из этого сделать вывод, что на улице идет дождь? Нет, на улице может быть мокро и без дождя, по другим причинам: или проехала поливальная машина, или растаял снег.

Основная причина невозможности сделать достоверный вывод по этой форме заключается в так называемой множественности причин. И лишь тогда, когда для следствия существует только одна причина, вывод в этой форме будет верен, но тогда это будет уже трансформированная форма с включением в рассуждение знания об этой единственно возможной причине.

На том же примере с дождем и мокрой мостовой становится очевидным невозможность достоверного заключения во втором виде сочетания посылок:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Если } A, \text{ то } B.\\ \text{Не } A.\end{array}}{?}$$

Правильные модусы условно-категорического силлогизма (и *ponens*, и *tollens*) имеют по четыре верных варианта — в зависимости от качества (утверждения или отрицания) той или другой части условной посылки. Любой читатель на основе сказанного легко может построить и проверить на примерах эти варианты.

При наличии выделяющей условной посылки возможны не два, а четыре вида правильных условно-категорических силлогизмов. В этом случае можно умозаключать не только от утверждения основания к утверждению следствия и от отрицания следствия к отрицанию основания, но и от утверждения следствия к утверждению основания и от отрицания основания к отрицанию следствия. Примеры:

Если число делится на 2 и на 3, то тогда и только тогда оно делится на 6.
Данное число делится на 6.

Данное число делится на 2 и на 3.

Взяв в этом примере в качестве второй посылки суждение «Данное число не делится на 2 и на 3», мы получим заключение: «Следовательно, оно не делится на 6».

2. *Разделительные силлогизмы.* Разделительными, или дизъюнктивными, силлогизмами называются такие, первая посылка которых есть разделительное (дизъюнктивное) суждение. Вторая посылка и вывод суть суждения разделительные или категорические.

Схема дизъюнктивного, или разделительного, суждения, образующего первую посылку дизъюнктивного силлогизма, имеет такой вид: S есть или A, или B, или C.

Каждое из суждений, входящее в данное разделительное суждение (S есть A, S есть B, S есть C), называется альтернативой. В данном разделительном суждении содержатся три альтернативы.

Дизъюнктивные силлогизмы имеют два модуса:

а) S есть A, или B, или C;
S не есть ни A, ни B.

Следовательно, S есть C.

В этом модусе разделительного силлогизма во второй посылке отрицается все, кроме одной, альтернативы; поэтому в выводе утверждается эта оставшаяся альтернатива. Так как в выводе мы приходим к утверждению, то модус называется утверждающим, и так как к этому утверждению мы пришли посредством отрицания всех альтернатив, кроме одной, то модус получает название модуса, утверждающего посредством отрицания (*tollendo ponens*).

б) S есть или A, или B, или C;
S есть A.

Следовательно, S не есть ни B, ни C.

В этом модусе во второй посылке утверждается одна альтернатива; поэтому в выводе все оставшиеся альтернативы отрицаются. Этот модус по своему итогу оказывается отрицающим, а способ получения этого отрицания у него — утверждение.

Вследствие этого полное наименование этого модуса такое: модус, отрицающий посредством утверждения (*ponendo tollens*).

Для правильности построения разделительного силлогизма и истинности вывода, закономерно вытекающего из этого силлогизма, необходимо соблюдение следующих двух правил построения разделительного силлогизма как условий истинности его вывода:

а) в разделительном суждении должны быть приведены все возможные альтернативы. Другими словами, деление субъекта суждения должно быть полным, исчерпывающим;

б) необходимо учитывать точное значение союза «или», которое может быть и чисто-разделительным и соединительно-разделительным, так как при чисто-разделительном значении союза «или» все альтернативы исключают одна другую, а при соединительно-разделительном значении союза «или» альтернативы не исключают одна другую.

3. *Условно-разделительные силлогизмы.* В условно-разделительном (лемматическом) силлогизме одна посылка является условным суждением, а вторая — разделительным. В зависимости от количества альтернатив, содержащихся в разделительном суждении этого силлогизма, он называется дилеммой, трилеммой, тетралеммой. Наиболее употребительной в практике мышления является дилемма. Она бывает простой и сложной, конструктивной (созидательной) и деструктивной (разрушительной).

В конструктивной дилемме совершается мысленный переход от утверждения альтернатив в основаниях условного суждения к утверждению соответствующих следствий. В деструктивной дилемме происходит переход мысли от отрицания следствий к отрицанию оснований.

Различия между простой и сложной конструктивными дилеммами состоят в том, что: 1) в большей посылке простой дилеммы каждое из двух оснований обусловливает одно и то же следствие, а в сложной дилемме разные основания обусловливают разные следствия; 2) в простой дилемме заключение является категорическим суждением, а в сложной — разделительным.

Простая конструктивная дилемма соответствует схеме:

$$\begin{array}{l} \text{Если } A\text{, то } C\text{; если } B\text{, то } C. \\ A \text{ или } B \\ \hline C. \end{array}$$

Пример:

Если число делится на 6, то оно делится на 2; если число делится на 8, то оно делится на 2.
Но данное число делится или на 6, или на 8.

Данное число делится на 2.

Схема сложной конструктивной дилеммы:

Если A, то B; если C, то D.
A или C.

B или D.

Пример:

Человек, находящийся в горящем доме, может рассуждать так:

Если я пойду из дома по лестнице, то получу ожоги; если я выпрыгну из окна, то получу ушибы.
Но я могу выпрыгнуть из окна или пойти по лестнице.

Я или получу ожоги, или получу ушибы.

Простая и сложная деструктивные дилеммы различаются тем, что: а) в большей посылке простой дилеммы два возможных следствия вытекают из одного основания, а в сложной — из двух оснований; б) заключение в простой деструктивной дилемме является категорическим суждением, а в сложной — соединительным.

Схема простой деструктивной дилеммы следующая:

Если A, то или B, или C.
Но не B и не C.

Не A.

Пример:

Если растение является деревом, то оно либо лиственное, либо хвойное.
Но данное растение не есть ни лиственное и ни хвойное.

Данное растение не есть дерево.

Схема сложной деструктивной дилеммы:

Если A, то B; если C, то D.
Но не B и не D.

Не A и не C.

Пример:

Если треугольник прямоугольный, то в нем есть два угла, сумма которых равна одному прямому углу; если же треугольник тупоугольный, то в нем есть два угла, сумма которых меньше прямого угла.
В данном треугольнике или нет двух углов, сумма которых равна прямому углу, или нет двух углов, сумма которых меньше прямого угла.

Следовательно, данный треугольник и не прямоугольный, и не тупоугольный.

4. *Правила построения условно-разделительных силлогизмов.* В названных силлогизмах существуют следующие правила, обеспечивающие истинность вывода из истинных посылок:

1) умозаключать в условно-разделительных силлогизмах можно от утверждения основания к утверждению следствия и от отрицания следствия к отрицанию основания, но нельзя умозаключать от утверждения следствия к утверждению основания и от отрицания основания к отрицанию следствия;

2) во второй посылке, которая есть разделительное суждение, должны быть полностью перечислены все альтернативы;

3) необходимо, чтобы союз «или» имел чисто разделительное значение, т. е. чтобы альтернативы были исключающими друг друга.

Неправильность лемматического умозаключения очень часто вызывается тем, что дилемма формулируется там, где необходимо формулировать трилемму или тетралемму, так как дилемма в этом случае не исчерпывает всех альтернатив. Такая ошибка, например, допущена в следующем рассуждении:

Данный лес или лиственный, или хвойный.
Установлено, что данный лес не лиственный.

Данный лес хвойный.

Ошибка здесь состоит в том, что не учтена третья возможность — возможность быть смешанным лесом.

§ 33. Индуктивные умозаключения

Дедуктивные умозаключения, рассмотренные ранее, далеко не исчерпывают всей области умозаключений, хотя и составляют существенную и наиболее разработанную логикой часть. Если поставить вопрос о том, как формулируется то общее, которое, как известно, составляет исходный пункт дедукции, то окажется, что правильный ответ на него нельзя дать без знания индуктивных умозаключений. Индукцию (букв. *inductio* — наведение) понимают обыкновенно, с одной стороны, как метод исследования, целью которого является анализ движения знания от единичного к общему суждению. С другой стороны, индукция выступает как определенная логическая форма, т. е. такая устойчивая связь мыслимого содержания, в которой отражается и фиксируется восхождение мысли от менее общих положений к более общим положениям. Далее индукция и будет рассматриваться именно с точки зрения ее принадлежности к такому виду умозаключений, где осуществляется перенос знания об отдельных предметах класса на весь класс. Познавательное значение индукции в общем и целом было уже отмечено Аристотелем.

Привязанность индукции к опытному наблюдению и эксперименту, часто непосредственная проверяемость индуктивного обобщения делают ее, согласно Аристотелю, более простым и часто употребляемым, по сравнению с дедуктивным, умозаключением. Но тем не менее, признавая простоту и очевидность индуктивных умозаключений, Аристотель предпочтение отдал детальной разработке более строгого вида умозаключений — силлогистике.

Виды индуктивных умозаключений. Различают индукцию *полную*, если посылки исчерпывают весь класс предметов, подлежащих индуктивному обобщению, и *неполную*, если посылки не исчерпывают всего класса предметов, подлежащих индуктивному обобщению. Выводом как по полной, так и по неполной индукции является общее суждение.

Полная индукция. Ход мыслей по полной индукции осуществляется по схеме:

$$S_1 \text{ есть } P$$
$$S_2 \text{ есть } P$$
$$\dots\dots$$
$$S_n \text{ есть } P$$

Известно, что S_1, S_2, S_n исчерпывают все предметы класса S. Следовательно, все S есть P. Например:

Сентябрь в Ленинграде был сырым, холодным, дождливым.
Октябрь тоже.
Ноябрь тоже.
Сентябрь, октябрь, ноябрь — осенние месяцы.
Следовательно, осень в Ленинграде была сырой, холодной и дождливой.

Как видно, полная индукция — такой вид индуктивного умозаключения, в котором общий вывод базируется на знании о всех без исключения предметах изучаемого класса, и поэтому вывод здесь — категорическое суждение, причем предикат посылок и вывода, как и вообще во всех индуктивных умозаключениях, один и тот же. Полная индукция, обнаруживая сходство с силлогическими умозаключениями как в смысле достоверности выводов, так и в ходе самого умозаключения, особенно по третьей фигуре силлогизма (перенос предиката с вида на род) не дает знания о других предметах, кроме тех, которые берутся в качестве частных посылок. В связи с этим некоторые логики считают, что, во-первых, полная индукция — это вовсе не индукция, а если и признают ее таковой, то, во-вторых, отказывают полной индукции в новизне и значимости ее выводов.

По поводу первого надо заметить, что по форме умозаключения полная индукция — это именно индукция с типичным для последней ходом мысли от единичного к общему, от менее общего к более общему. По поводу второго проф. В. Ф. Асмус в своей «Логике» справедливо замечает, что, не распространяясь на новые предметы, общий вывод полной индукции характеризует те же самые предметы с некоторой новой стороны, а именно со стороны их родовой принадлежности. Кроме того, если отказать полной индукции в новизне и значимости, то надо отказаться вообще от дедуктивных умозаключений, чего, по вполне понятным причинам, сделать никак нельзя.

Но отдавая должное полной индукции, все же надо отметить, что в реальном человеческом познании она занимает незначительное место, потому что с полным набором случаев человек в силу ограниченности своего существования во времени и пространстве, как правило, не имеет дела, довольствуясь не всеми предметами класса, и лишь частью их. Поэтому человеческое мышление с необходимостью обращается к неполной индукции, в которой общий вывод делают на основании знания не о всех предметах класса, а о некоторой части их. Основанием для такого переноса послужила, очевидно, как внутренняя природа самих вещей, так и общественно-историческая практика людей.

Обнаружив сходство либо различие и установив что-либо относительно частных, принадлежащих части класса случаев, человек затем это сходство (различие) переносил на весь класс. Так поступают и в «житейских» ситуациях, и в науке. Многократная практика санкционирует этот перенос и потому индукция позволяет сделать более или менее правильный вывод. При этом непременным условием неполной индукции (как, впрочем, и всех индуктивных умозаключений) является отсутствие противоречивых случаев. Примером неполной индукции через простое перечисление при отсутствии противоречащих случаев может служить следующий ход мысли:

Железо — твердое тело;
Медь — твердое тело;
Золото — твердое тело;
Платина — твердое тело.

Следовательно, все металлы — твердые тела.

Легко видеть, что схема, по которой осуществляется вывод по неполной индукции, такова:

$$
\begin{array}{l}
S_1 \text{ есть } P \\
S_2 \text{ есть } P \\
\quad . \; . \; . \; . \; . \\
S_n \text{ есть } P \\
S_1, S_2, \ldots, S_n \text{ — часть класса } S. \\
\hline
\text{Следовательно, все } S \text{ есть } P.
\end{array}
$$

Имея в виду неполную индукцию, в частности индукцию через простое перечисление при отсутствии противоречащих фактов, надо отметить следующее. Поскольку вывод по неполной индукции есть скачок, переход от известного к неизвестному и поскольку неполной индукцией сознательно кладется принцип рассмотрения не всего количества предметов, а лишь части из них, постольку выводы по неполной индукции всегда носят вероятностный характер. Отсюда и опасность заблуждения при индуктивном умозаключении несравненно больше, чем в силлогизме. Силлогизм, как известно, дает с необходимостью всегда истинный вывод при условии истинных посылок и соблюдения определенных логических правил, так что условие истинности силлогических умозаключений заключено не в самом силлогизме. Что же касается неполной индукции, то здесь, как мы видели, переход от части к целому, от менее общего к более общему осуществляется в форме скачка, в котором и скрыта возможность ошибки, ибо достаточно одного противоречащего случая, чтобы все здание индуктивного умозаключения рухнуло. Так, почти во всех учебниках логики приводится пример с выводом, полученным на основании неполной индукции — «Все лебеди белые», который оказался несостоятельным, когда в Австралии впервые обнаружили черных лебедей. Или в предыдущем примере, если мы узнаем, что ртуть, например не твердое тело, то сделанный вывод о том, что все металлы твердые тела, окажется ложным.

Итак, вывод неполной индукции носит вероятностный характер.

Но вероятность индукции — это не следствие неуверенности и слабости человеческого сознания, не априорное (доопытное) свойство нашего знания и не врожденный природный инстинкт, как считали Яков Бернулли (один из основателей теории вероятности), Лейбниц (немецкий философ-идеалист) или Дж. С. Милль (английский логик-«всеиндуктивист», по характеристике Энгельса).

Вероятность индуктивных умозаключений связана с принципиальной незавершенностью человеческого опыта, на что особое внимание обращал В. И. Ленин.[23]

Условия, повышающие вероятность выводов по неполной индукции. Уже отмечалось, что так как обобщение по неполной индукции в качестве своей предпосылки имеет всегда лишь ограниченное знание (знание не о всех предметах класса), то вывод ее всегда будет носить вероятностный характер. Отсюда встает задача повышения вероятности выводов по неполной индукции. Вывод по неполной индукции будет более вероятен при выполнении следующих условий:

1) необходимо брать возможно большее количество случаев для индуктивного обобщения. Например, когда более вероятен вывод о том, что существует внеземная жизнь: а) в том случае, когда изучена одна планета солнечной системы; в) или в том случае, когда изучено большинство планет. Само собой понятно, что вывод в случае б) будет более вероятен;

2) вывод будет более вероятен в том случае, когда факты, служащие основанием обобщения, более разнообразны и по возможности более полно характеризуют предмет индуктивного

---

[23] См.: Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 162.

обобщения. Имея в виду предыдущий пример, надо сказать, что вывод о наличии внеземной жизни будет тем более вероятен, чем по более разнообразным основаниям будут сравнивать между собой планеты;

3) вероятность вывода по неполной индукции повышается в том случае, когда предметы, знания о которых индуктивно обобщаются, обладают внутренней объективной связью между собой и чем более существенный признак (или группа признаков) берется в качестве основы для индуктивного обобщения. Например, какой признак (или группу признаков) необходимо взять в качестве основы для индуктивного обобщения такого рода: «Вполне вероятно, что вне Земли есть разумные существа». Здесь в качестве основы для более вероятного индуктивного вывода о наличии внеземных разумных существ следует взять, видимо, способность изготовлять и пользоваться орудиями и средствами труда.

Вероятность вывода по неполной индукции будет увеличена и в том случае, если мы индуктивное обобщение избавим от следующих распространенных ошибок:

1) от ошибки, называемой «поспешным обобщением». «Поспешное обобщение» бывает там и тогда, когда в посылках не учтены все обстоятельства, которые, может быть, и являются причиной исследуемого явления. Например, на основании некоторого сходства между процессами, происходящими в мозгу человека, и процессами, протекающими в ЭВМ, делают иногда поспешный вывод о близком наступлении эры «машинного» мышления (не учитывается при этом, например, социальная обусловленность человеческого мышления, его творческий и преобразующий характер и др.);

2) оперируя неполной индукцией, следует обезопасить себя от ошибки, называемой «после этого, значит по причине этого» (*post hoc, ergo propter hoc*).

Научная индукция. В отличие от неполной индукции через простое перечисление при отсутствии противоречащего случая (такого рода неполную индукцию называют популярной, в ней посылки для обобщения берутся по большей части случайно) научная индукция имеет своей главной задачей отыскание связей существенных, среди которых важное место принадлежит причинно-следственным связям. Знание причинной связи явлений обеспечивает успех практической деятельности, позволяет человеку активно влиять на ход событий и предвидеть будущее их развитие.

Особую роль в научной индукции играют наблюдение и эксперимент. Наблюдение и эксперимент в научном познании могут выступать в форме самостоятельных методов исследования. В данном разделе они рассматриваются как необходимые условия, в которых протекают индуктивные умозаключения, в особенности типа научной индукции. Исследуя явления природы или общества, мы наблюдаем и изучаем отдельные предметы, факты, прежде чем сделать то или иное обобщенное индуктивное умозаключение.

В отличие от простого созерцания, *научное наблюдение* есть такое установление и описание фактов и явлений по заранее составленному плану, когда наблюдатель остается лишь свидетелем исследуемых фактов в их естественных условиях. В научном наблюдении выражается непосредственное теоретическое отношение человека к окружающему его миру и самому себе. Данные наблюдения, будучи систематизированными, становятся затем основой для обобщающих выводов. Классическим примером такого рода обобщения является эволюционная теория Ч. Дарвина.

Часто для усиления органов чувств и в зависимости от цели исследования человек использует различного рода приборы, чтобы точнее описать и зафиксировать наблюдаемые факты. Однако, используя различные приборы и инструменты, наблюдатель не волен нарушать естественный ход и условия, в которых протекают наблюдаемые явления. Такое пассивное наблюдение за ходом протекающих событий (фактов) сильно ограничивает значение наблюдения для получения новых научных обобщений.

Эти недостатки наблюдения в известной мере восполняет эксперимент (лат. *experimentum*), с которым наблюдение неразрывно связано. Экперимент осуществляется в условиях, искусственно измененных согласно тем задачам и целям, которые ставит исследователь. Например, строится модель русла реки и на ней изучаются особенности ее поведения в различных изменяющихся условиях. Сопоставляя различные черты опыта (эксперимента) с наблюдением, И. П. Павлов писал: «Опыт как бы берет явления в свои руки и пускает в ход то одно, то другое и таким образом в искусственных, упрощенных комбинациях определяет истинную связь между явлениями. Иначе сказать, наблюдение собирает то, что ему предлагает природа, опыт же берет у природы то, что он хочет» [24].

Важным преимуществом эксперимента над наблюдением является то, что эксперимент позволяет исследователю активно вмешиваться в наблюдаемые явления, воспроизводить их всякий раз, когда это необходимо для научного исследования, разлагать сложные события на более простые. Кроме того, в процессе самого эксперимента могут создаваться новые искусственные предметы (например, «лунная» тележка). Эксперимент, в отличие от наблюдения, дает возможность изучать то или другое явление в «чистом» виде, освобожденном от случайностей и тем самым вскрывать необходимые, причинно-следственные взаимосвязи.

---

[24] Павлов И. П. Полн. собр. соч., т. 11. М., 1946, с. 357.

Эксперимент ставится с целью либо доказательства (или опровержения) чего-то уже имеющегося, либо обнаружения новых причинно-следственных связей. Эксперимент обычно делят на материальный и идеальный (мысленный). Такое деление говорит о сложной, индуктивно-дедуктивной природе эксперимента. Эксперимент (как и наблюдение), который всегда преследует какую-либо цель, задачу, в силу этого не может обойтись без соответствующего дедуктивного знания, а сами результаты, т. е. знания, полученные в ходе эксперимента (наблюдения), индуктивные по своей сути, остаются непонятными вне дедуктивного обобщения.

Научная индукция как вид умозаключения, конечно, сильна тем, что каждый ее шаг связан с фактами, опытом, проверяемостью.

Но эти же достоинства научной индукции предопределяют и слабости ее, слабости, связанные с незавершенностью в общем и целом опытного познания. В. И. Ленин отмечает в этой связи: «Самая простая истина, самым простым, индуктивным путем полученная, всегда неполна, ибо опыт всегда незакончен». [25]

Отсюда — несостоятельность «всеиндуктивизма» как всеобщего и единственно верного метода познания. Поэтому ценность индукции не в том, чтобы абсолютизировав ее очевидную связь с фактами, наблюдением, экспериментом, противопоставить ее, например, дедукции, а в том, чтобы в каждом конкретном случае обнаружить значение индукции и как метода познания, и как формы мышления. Последнее неизбежно приводится к выводу о взаимосвязи индукции и дедукции, к взаимосвязи, в которой дедукция и индукция выступают необходимым средством достижения истины.

Взаимосвязь дедукции и индукции. Что является объективной основой индукции и дедукции?

Такой основой является взаимосвязь отдельного и общего, которую в свое время не смог объяснить Аристотель и плодотворный анализ которой стал возможным только в диалектическом материализме. Как в объективной действительности отдельное существует «в той связи, которая ведет к общему» [26], так и в мышлении индуктивное движение знания от единичного (частного) к общему с самого начала взаимосвязано с противоположным процессом движения знания от общего к единичному (частному). Так, например, то общее, из которого дедуцируется частное, само является зачастую продуктом индуктивного обобщения.

Индуктивному обобщению подлежат не любые свойства, отношения предметов объективного мира, а только такие, которые так или иначе связаны между собой, и индуктивное обоб-

---

[25] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 162.
[26] Там же, с. 318.

щение будет тем верней, чем на более глубоких внутренних существенных связях оно базируется, а это предполагает дедуктивное знание, ибо последнее есть форма проявления сущности, развертывание необходимого знания. Таким образом, сам процесс индукции необъясним вне дедуктивного знания, что подчеркивал Ф. Энгельс.[27]

В свете сказанного отпадает вопрос, что чему предшествует — индукция дедукции или дедукция индукции, как нельзя поставить вопрос: общее предшествует единичному или единичное общему? Это подтверждается и практикой человеческого познания. Уже выдающимся логиком М. И. Каринским (1840—1917) убедительно было доказано, что выводы по третьей фигуре силлогизма, ранее считавшиеся только дедуктивными, на самом деле предполагают индуктивное знание. Так, точке зрения противопоставления индукции и дедукции М. И. Каринский аргументированно выдвинул положение о логической связи между ними, обнаружив единство и даже некоторое сходство дедукции и индукции. Тем самым работами М. И. Каринского блестяще подтверждено указание Энгельса на то, что дедукция и индукция «связаны между собой столь же необходимым образом, как синтез и анализ. Вместо того чтобы односторонне превозносить одну из них до небес за счет другой, надо стараться применять каждую на своем месте, а этого можно добиться лишь в том случае, если не упускать из виду их связь между собой, их взаимное дополнение друг друга».[28]

§ 34. Аналогия

1. **Сущность аналогии.** Термин «аналогия» в древнегреческом языке означал пропорцию. Первоначально он использовался древнегреческими математиками для обозначения совпадения отношения между числами. Система двух чисел 6 и 9 «аналогична» системе двух чисел 8 и 12, поскольку отношения соответствующих членов этих двух систем согласуются: $6 : 9 = 8 : 12$.

В дальнейшем «аналогию» стали употреблять в более широком смысле как сходство, соответствие, подобие предметов и явлений, тождество их отношений. Аналогичными могут быть не только предметы, исторические события, но и понятия, мысли. Например, по вопросу взаимоотношения бытия и сознания Гегель излагал мысли, аналогичные взглядам Платона. Многозначность понятия аналогии — следствие ее широкой распространенности, разностороннего применения ее приемов в практике мышления и научного познания.

В логике аналогия рассматривается как форма получения выводного знания, как умозаключение, в котором на основании

---

[27] См.: Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 542.
[28] Там же, с. 542—543.

сходства предметов в одних признаках делается вывод о сходстве этих предметов в других признаках. Пример из практики научного познания: в спектрах химических элементов, удаленных от Земли, линии туманностей сдвинуты в сторону красной части спектра по сравнению с линиями этих элементов, наблюдаемых в земных условиях. Это — явление «красного смещения». «Красное смещение» — результат взаимного удаления галактик в окружающей нас области Вселенной. Явление «красного смещения» было открыто по аналогии с акустическими явлениями, так называемым «эффектом Доплера». Частота колебаний или длина звуковой волны, воспринимаемая наблюдателем, изменяется в зависимости от движения источника звука и наблюдателя относительно друг друга. При их сближении частота возрастает, при удалении — уменьшается. В акустике при сближении источника звука и приемника-наблюдателя тон звука повышается, при удалении — понижается. Сходство природы света и звука в ряде свойств послужило основанием для истолкования «красного смещения» по аналогии с эффектом Доплера, как следствия удаления от нас туманностей. Как известно, скорость света не зависит от скорости источника излучения, но от нее (от скорости источника излучения) зависит воспринимаемая длина волны света. Если источник движется по направлению к наблюдателю, то последний воспринимает свет большей частоты (т. е. смещенный к фиолетовому концу спектра), если же источник движется от наблюдателя, то частота воспринимаемого света будет меньшей и произойдет смещение спектральных линий к красному концу спектра.

Схематически это умозаключение по аналогии выглядит так:

$$\frac{\begin{array}{l} A \text{ имеет признаки } abcd. \\ B \text{ имеет признаки } abc. \end{array}}{\text{Вероятно, что } B \text{ имеет признак } d.}$$

Признаком предмета (или системы предметов, явлений, мыслей, знаний) может выступать свойство предмета, его отношение, характерная черта, его структура или функция. Смысл аналогии заключается в том, чтобы находить неизвестные признаки предмета, опираясь на ранее приобретенные знания о другом, сходном с ним предмете, переносить информацию от одного предмета на другой на основе некоторого отношения между ними.

В зависимости от характера переносимой информации различаются типы аналогий. Если предметы сравниваются по их свойствам (обитаемость Земли и обитаемость Марса), то это дает один тип аналогии. Если основой сравнения выступают отношения предметов (уподобление Энгельсом взаимоотношения формальной логики и логики диалектической с отношением между арифметикой и высшей математикой), то будет другой тип аналогии. В каузальной аналогии аналогичными оказываются явления, порождаемые одинаковыми причинами. С одного из них на другое переносится свойство «иметь данную причину». Но возможен и противоположный процесс, когда основанием вывода по аналогии является однородность причин, а сам вывод заключается в переносе информации об одном из действий причины на другое (аналогия следствий). В функционально-структурных аналогиях структуры систем отождествляются на основе тождества их функций. В структурно-функциональных аналогиях, наоборот, структурное тождество является основанием для отождествления функций.

Объективным основанием аналогии является отношение предметов, закономерная связь между отдельными сторонами, свойствами в сравниваемых предметах. Например, у млекопитающих животных имеется зависимость между качеством пищи, строением зубов и строением желудка. Зависимость эта является существенной и необходимой. Она позволяет на основании сходства природных условий существования животных судить об общности строения их органов. Миллиардное повторение этой взаимозависимости предметов в человеческой практике выражается в аксиоме аналогии: если предметы сходны в одних определенных признаках, то они могут быть сходны и в других признаках. Аналогия отражает сходство, подобие предметов и явлений. Когда говорят, что два предмета аналогичны, то значит: они подобны в некоторых отношениях. Аналогичные предметы — отчасти сходные, отчасти различные. Плавники у рыб аналогичны крыльям у птиц. Сходство предметов в определенном отношении не может служить основанием для полного отождествления этих предметов. Например, существует аналогия между языком и орудиями производства: орудия производства, так же как и язык, проявляют своего рода безразличие к классам и одинаково обслуживают различные классы общества. Но это обстоятельство не дает основания для того, чтобы причислить язык к разряду орудий производства. Одни и те же признаки могут принадлежать различным предметам, например, свойством отражать предмет обладает любая отполированная поверхность — вода, зеркало, кусок металла и др., но ведь это всё разные предметы. Следовательно, установление сходства между предметами дает основание заключать не о тождестве самих предметов, а о сходстве тех признаков, которые у одного из сравниваемых предметов наличны, а у второго только предполагаются.

Выводы по аналогии носят *вероятностный* характер. Достоверность и вероятность характеризуют разные степени, уровни доказательности знания. Вероятное знание имеет многочисленные градации, начиная от маловероятных, ненадежных знаний и кончая степенью, непосредственно граничащей с достоверными знаниями. От чего же зависит степень вероятности выводов по аналогии? Каковы логические основания этих выводов?

Объективные основания создают возможность выводов по аналогии. Для превращения этой возможности в действительность необходимы определенные условия, которые являются логическими основаниями аналогии. Условиями повышения вероятности выводов по аналогии являются в основном обстоятельность и широта изучения аналогичных предметов или явлений. Выводам, как правило, предшествует исследовательская работа над явлениями.

Самый начальный и простой вид исследовательской работы — это усмотрение сходства между аналогичными явлениями, выявление у них возможно большего количества сходных признаков. На сходстве геологических процессов (деятельность текучих поверхностных и подземных вод, процессы вулканизма, землетрясения, вертикальные колебательные движения земной коры и др.), происходящих в разных местах и в разное время, основывается принцип актуализма в геологии, согласно которому закономерности, установленные для современной эпохи, по аналогии переносятся на прошлые геологические времена.

Но само по себе наличие общих признаков у сравниваемых предметов не является решающим при получении выводов по аналогии. Надо стремиться к тому, чтобы общие признаки сравниваемых предметов были наиболее типичными для этих предметов, тесно связанными с их специфическими признаками. Земля и Марс состоят из атомов и молекул. Но эти общие признаки свойственны и другим материальным предметам и поэтому не могут быть использованы в роли логических оснований для аналогии при рассмотрении вопроса о существовании жизни на Марсе.

Большое значение имеет разнообразие общих свойств у сравниваемых предметов. Если общие свойства будут однотипными (например, все — геометрическими или физическими), то вывод будет менее правомерен, чем при общности как геометрических, так и физических, химических, метеорологических и других свойств.

При анализе логических оснований необходимо идти от явления к сущности, так как это движение является общей закономерностью всякого познания. Умозаключение по аналогии будет иметь бóльшую основательность, если сравниваемые предметы имеют общность в существенных признаках, чем тогда, когда они сходны по случайным признакам. И чем существеннее сходство между сравниваемыми предметами, тем бóльшую основательность имеют умозаключения по аналогии. Пример: от известных нам плодовых деревьев мы ждем одинаковых плодов. Но если на строительном участке нам попалось несколько куч песка, на каждой из которых лежало по три кирпича, то по аналогии с ними вряд ли мы будем надеяться встретить по три кирпича на каждой куче песка. В первом случае органическая связь в составе уподобляемых предметов является их существенной связью, а во втором — механическое соединение двух предметов носит случайный характер. Неразличение той и другой связи приводит к несостоятельности аналогии.

В числе логических оснований аналогии следует указать еще одно правило: степень вероятности вывода зависит от возможно более обстоятельного знакомства с аналогичными предметами. Чем более полно знание каждого предмета, тем меньшую роль играет их число. Предметы могут оказаться сходными во многих известных нам признаках, и тем не менее оснований для большой вероятности выводов по аналогии у нас не будет, если предметы мало исследованы, если не вскрыта их сущность, если игнорируется специфика изучаемых явлений, если не берутся во внимание признаки различия, имеющиеся в сравниваемых явлениях. Неучет всех этих факторов ведет ко всякого рода поверхностным аналогиям между явлениями. Примером их является проведение исторической параллели между поступком Зои Космодемьянской и Василисы Кожиной или Жанны д'Арк, отождествление рабочего класса в капиталистических странах с римским люмпен-пролетариатом, коммунизма — с христианской ересью. Такого рода исторические аналогии, проводимые без достаточных оснований, влекут за собой антиисторический подход к изучаемым явлениям и мешают пониманию как прошлого, так и настоящего.

Итак, повышение степени вероятности выводов по аналогии зависит от следующих условий: 1) от количества рассмотренных сходных признаков у сравниваемых явлений; 2) от степени существенности этих признаков. Одним словом, чем обстоятельнее проанализировано сходство и различие изучаемых явлений, тем основательнее заключение по аналогии.

Для получения более вероятных выводов по аналогии требуется возможно большее сходство между сравниваемыми предметами или явлениями. Однако при этом следует учитывать одно весьма существенное обстоятельство. Чем больше сходства между сравниваемыми предметами, тем меньше эвристическая ценность аналогии. В теории моделирования, например, совершенно верно принято считать, что слишком отдаленная модель может ввести в заблуждение, а слишком «точная» теряет свой смысл, становится бесплодной. При сравнительном изучении родственных языков исследователь опирается на факты не только сходства, но и различия между ними. Если различия между ними минимальны, то они не дают материала для сравнения. «Когда в одном родственном языке имеется, например, шесть падежей, в другом — четыре, в третьем — два, то, сравнивая и сопоставляя эти данные, исследователь скорее может установить тенденцию развития падежных отношений в этих языках, чем в том случае, когда во всех родственных языках падежи представлены одинаково».[29]

Выводы по аналогии вероятны. Но вероятностный характер этих выводов не следует абсолютизировать. Аналогия аналогии рознь. В отличие от популярных аналогий, используемых в обыденной практике людей, некоторые научные выводы, основывающиеся на аналогии, близки к достоверному знанию. Известно, что действие таких монументальных сооружений, как мост, плотина, первоначально изучается на моделях. Модель — аналог предмета. Моделирование позволяет на уменьшенной или увеличенной модели проводить качественное и количественное изучение процесса, протекающего в «образце», который недоступен для детального исследования. Результаты единичного опыта обобщаются и переносятся на целую группу предметов, подобных изучаемому. Метод моделирования базируется на теории подобия, которая дает обоснование для переноса закономерностей, полученных на модели, на образец. При этом выводы близки к достоверным. Здесь нельзя остановиться на суждениях: плотина, вероятно, выдержит напор воды, корабль, вероятно, не утонет.

Познавательное значение аналогии. Познание действительности диалектично. Мы движемся от незнания к знанию, от неполного знания к знанию более полному, достоверному. Знание о явлении и познание сущности выступают своеобразными ступенями процесса познания. Открытию закона и сущности предшествует большая исследовательская работа. «Если бы мы захотели ждать, пока материал будет готов в *чистом виде* для закона, — говорит Энгельс, — то это значило бы приостановить до тех пор мыслящее исследование, и уже по одному этому мы никогда не получили бы закона».[30]

Познавательное значение аналогии как раз и определяется тем, что она выступает одним из активных исследовательских приемов преимущественно на начальном этапе процесса познания. Будучи простой по строению, популярной в употреблении, аналогия выступает первоначальной формой познания, составляет одно из начальных звеньев в цепи достижения научных результатов.

Первобытный человек, обладая небольшим запасом знаний, при недостаточно развитом мышлении, судил о новых предметах по аналогии с ранее встречавшимися. В Южной Африке среди бушменов наблюдались случаи, когда охотники не хотели пользоваться стрелой, которая хотя бы один раз не попала в цель. Стрелы же, попавшие в цель, ценились вдвойне. При этом бушмены, несмотря на трудности изготовления стрел, предпочитали делать новые, нежели собирать старые, не зарекомендовавшие

---

[29] Будагов Р. А. Введение в науку о языке. М., 1958, с. 373.
[30] Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 20. с. 555.

себя в деле. Удачно использованные орудия, сети, рыболовные крючки, стрелы содержались в чистоте и порядке, за ними тщательно ухаживали. И все это потому, что от них по аналогии ожидали такого же успеха и в новых условиях. [31]

Исследование явлений действительности начинается с их наблюдения и сравнения. Все познается в сравнении. Чтобы сказать, что та или иная вещь плоха или хороша, надо сравнить ее с другой и определить, лучше или хуже она последней. Сравнивая социалистические производственные отношения с капиталистическими, мы заключаем, что они являются лучшей формой организации общества, так как темпы экономического развития социалистического хозяйства в несколько раз превышают темпы развития капиталистической экономики.

Абсолютные показатели, будучи необходимыми для различных практических целей, зачастую остаются немыми, если нам не с чем их сравнить. Они раскрывают свой смысл в сопоставлении их с другими показателями. Волжская гидроэлектростанция имеет мощность 11 миллиардов киловатт-часов электроэнергии. Чтобы осознать грандиозность этой цифры, необходимо сравнение. Это количество электроэнергии в 5,5 раза больше, чем вырабатывали ее в 1913 г. во всей дореволюционной России, и примерно столько, сколько в 1950 г. вырабатывали все наши гидроэлектростанции.

Сравнение составляет первоначальный, вступительный шаг в выводах по аналогии. Сравнение позволяет обнаруживать характер общности и различия в сопоставляемых предметах. Последнее же существенным образом сказывается на степени вероятности получаемых выводов.

Науке известно немало открытий и технических изобретений, исследование в которых начиналось с аналогий. Первоначальные выводы, часто малообоснованные, выводы-догадки, составляли исходный пункт для новых исследований и соображений, побуждая ученых доискиваться дополнительных подтверждений и опровержений полученного знания, предвосхищая, таким образом, истину, являясь средством, наводящим на путь научных открытий. Так, например, плодотворной была аналогия между звуковыми и световыми явлениями. Сравнение явлений звука и света показало, что они обладают рядом сходных свойств: прямолинейностью распространения, отражением, преломляемостью, интерференцией. Кроме того, было известно, что звук вызывается периодическими движениями. На основании сходства прежних свойств ученые предположили, что и свет вызывается подобными же движениями. Это привело в дальнейшем к открытию световой волны. Или, например, сходство между явлениями

---

[31] См.: Леви-Брюль Л. Сверхъестественное в первобытном мышлении. М., 1937, с. 44—45.

в электрической машине и молнией привели Франклина к изобретению громоотвода.

Тысячи веществ созданы химиками по аналогии их с природными соединениями. Множество молекул синтезируется по аналогичным механизмам. Вот один из множества примеров плодотворного применения метода аналогии в химии. Микробиологам давно известна физиологическая активность фенолов. Присутствие салициловой кислоты в питательной среде повышает жизненную активность туберкулезной палочки. Отсюда был сделан вывод о ее метаболической значимости, а следовательно, о возможной антиметаболической активности ее аналогов. После исследования 50 аналогов бензойной кислоты было найдено, что парааминосалициловая кислота весьма успешно может быть использована для борьбы с туберкулезом.[32]

В юридической практике аналогия выступает средством оценки не предусмотренного действующим правом деяния на основании нормы, определяющей сходный случай. Если эта норма выражена в законе, то распространение ее на сходный случай будет аналогией закона.

Выдающиеся мыслители широко используют аналогию в научном исследовании. Весьма показательна роль аналогии в научном творчестве Ч. Дарвина. Теоретические выводы в его основном труде «Происхождение видов путем естественного отбора» были сделаны по аналогии с искусственным отбором. Первоначальным в его научной работе было обобщение практики изменения (усовершенствования, отбора) человеком домашних животных и культурных растений. Аналогия занимала значительное место в исследовательской работе В. И. Ленина. Ленин часто употреблял выражение «посоветоваться с Марксом», т. е. сопоставить по методу анализ современных исторических явлений с Марксовым анализом капиталистических отношений. «Брать произведения Маркса, посвященные разбору аналогичных ситуаций, тщательно анализировать их, сравнивать с переживаемым моментом, выявлять сходство и различие — таков был метод Ленина».[33]

Поскольку понятие аналогии имеет широкий смысл, то и применение ее в практике мышления и познания далеко не однозначно. Помимо только что отмеченного эвристического назначения аналогии она применяется как средство конкретизации мысли, как средство пояснения мыслимого содержания путем сравнения его с другим мысленным образом при наличии общности некоторых признаков.

В объективной действительности общее существует в отдельном, обнаруживает себя через отдельное. Мышление — аналог

---

[32] См.: Жданов Ю. А. Очерки методологии органической химии. М., 1960, с. 227.

[33] Крупская Н. К. Как Ленин работал над Марксом. М., 1933, с. 8.

действительности. И здесь общее и абстрактное проявляются через отдельное и конкретное. Например, в процессе определения понятий определяющее понятие представляет собой систему конкретного знания, раскрывающего смысл определяемого понятия. Здесь-то и требуются аналогичные понятия и образы, которые, не меняя объема понятия, конкретизируют его содержание. Мышление, подобно солидному банку, имеет в своей «кассе» разменный фонд, роль которого выполняют конкретные понятия и представления. А там, где этого разменного фонда нет, общие понятия оказываются малопригодными абстракциями и мышление, подобно обанкротившемуся банку, объявляется несостоятельным.

Аналогии необходимы тогда, когда изучаемый оригинал, не будучи конкретно выраженным, не дает уму познавательных представлений. В средние века цены на пряности, привозимые в Европу, были очень высоки. В наши дни трудно проследить движение этих цен, так как все исторические таблицы денежной ценности достаточно абстрактны. Выручить может наглядное представление (аналог абстрактных суждений о ценах), показывающее, что в начале второго тысячелетия нашей эры тот самый перец, который теперь стоит на столиках любого ресторана, перец, который сыплют небрежно, как песок, сосчитывался по зернышкам и расценивался едва ли не на вес золота. Перец, имбирь, корицу, хинную корку и камфору взвешивали на ювелирных и аптекарских весах, наглухо закрывая при этом двери и окна, чтобы сквозняком не сдуло драгоценную пылинку.

В аналогиях нередко содержится элемент историзма, опоры на факты. Придавая дополнительные оттенки мысли, конкретизируя ее, аналогии придают мышлению гибкость, обогащают его.

Показывая познавательное значение аналогии, мы наряду с другими понятиями использовали такие важные философские категории, как абстрактное и конкретное. Аналогия является средством конкретизации мысли. В этой связи уместно следующее уточнение. Роль научных абстракций велика. В сравнении с чувственно-наглядными образами они отражают действительность глубже, избавляют науку от частного и одностороннего. Но сами по себе они не являются целью познания. Они — средство для достижения цели. Целью познания является конкретный анализ явлений действительности, познание их в конкретной исторической обстановке, сообразуясь с условиями места и времени. В этой связи мыслить абстрактно — значит ставить и решать вопросы общо, недиалектически, например, рассуждать о равенстве «вообще», не сообразуясь с конкретным опытом истории. «Кто мыслит абстрактно? — спрашивает Гегель. И отвечает: — Необразованный человек, а вовсе не просвещенный».[34] Гегель здесь прав. Конкретность мышления — одно

---

[34] Гегель. Работы разных лет, т. 1. М., 1970, с. 391.

из необходимых условий его правильности. Правильное мышление — это не только мышление определенное, последовательное, доказательное, но и конкретное.

Будучи средством, наводящим порой на путь открытий, аналогия непригодна для доказательства и опровержения суждений. Незнакомые с логикой люди часто впадают в заблуждение, выдавая вероятные умозаключения по аналогии за доказательства своих утверждений. Ошибаясь, они не обращают внимания на имеющиеся, порой существенные, различия между двумя сравниваемыми явлениями. Так, например, часто в пользу признания особого вещества наследственности приводится довод о том, что раз организм мыслит не всем телом, а только мозгом, то и наследственностью должны обладать только отдельные специфические структуры. Эта ссылка на аналогию несостоятельна хотя бы потому, что понятия наследственности и мышления обладают различной степенью общности: наследственность присуща всем организмам, а мышление — только высшим животным и человеку.

Несостоятельными являются исторические аналогии, в которых проводится уподобление двух исторических явлений без определения черт сходства и различия между ними. Например, Плеханов и Каутский, защищая первую мировую империалистическую войну тезисом «защита отечества», ссылаются на Маркса и Энгельса, которые *применительно к другим условиям* говорили о предпочтительности победы в войне одной нации и поражения другой (имеется в виду поражение России в 1854—1855 гг.). «Если брать историческую параллель, — отмечал В. И. Ленин,— то надо выделить и точно указать то, что сходно в различных событиях, ибо иначе вместо исторического сравнения получится бросание слов на ветер». [35]

В целях дезориентировки и обмана масс буржуазные идеологи, ревизионисты сознательно закрывают глаза на пункты различия в уподобляемых явлениях и подменяют, таким образом, научную аналогию софизмом. «Прием всех софистов во все времена: брать примеры, заведомо относящиеся к принципиально непохожим случаям». [36] Например, социал-дарвинисты социальные закономерности человеческого общества истолковывают в плане биологических законов животного мира.

Аналогия ведет исследователя к знанию, помогает открытию истин, но не может выполнять роль единственного или основного метода научного исследования. Аналогия — вспомогательный прием в познании. Аналогии хороши, когда есть *основное* добротное содержание исследуемого вопроса. А когда вместо теоретического анализа вопросов излагаются одни аналогии, научного исследсвания не получится. «Часто аналогия вытесняет

---

[35] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 20, с. 126.
[36] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 26, с. 225.

одно эмпирическое представление другим; это попросту называется отводить глаза. Вы ждете, например, объяснения, каким образом общее чувствилище передает нерву, нерв мышцам движение вашей души, а вам, вместо понятия, подсовывают образ музыканта, натянутых струн, передающих фантазию художника; простой вопрос усложняется; это подобное можно опять свести на что-нибудь подобное, и первоначальный предмет совершенно затеряется в сходстве; это та самая метода, по которой человеческий портрет рядом подобных копий сводится на изображение фрукта».[37] Не всегда роль аналогии бывает положительной. Аналогия может толкать исследователя и по ложному пути. Так, рассмотрение процесса усвоения углекислоты зеленым листом растения по аналогии с дыханием вело естествоиспытателя по неверному пути.

Аналогия же, рассматриваемая как вспомогательный прием, как один из методов в арсенале методологической вооруженности познания, является вполне состоятельным, действенным приемом получения знаний, приемом, наводящим исследователя на догадки, предвосхищающие открытия, приемом объяснения и конкретизации знания.

---

[37] Герцен А. И. Избр. философские произв., т. 1. М., 1948, с. 106.

Глава V

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НАУЧНОГО МЫШЛЕНИЯ

§ 35. Методы классификации объектов исследования

1. **Некоторые общие черты классификации.** В научной литературе вообще и в сочинениях по логике в частности термин «классификация» часто употребляется как синоним термина «деление». В этом же значении этот термин употребляется в данном параграфе на том основании, что никакими особыми принципами или логическими правилами не отличается то, что называют логическим делением, от того, что именуется классификацией.

Сущность классификации заключается в раскрытии объема понятия путем перечисления всех понятий, которые являются по отношению к нему видовыми. Эти видовые понятия называются членами деления, а понятие, в объеме которого содержатся все члены деления, называется *делимым понятием.*

Делимым понятием, конечно, не может быть единичное понятие, так как в его объеме не имеется различных частей. Что касается общего понятия, то его объем раскрывается полностью, если все охватываемые им индивидуумы будут распределены по нескольким группам. Каждая такая группа соответствует понятию, которое находится к делимому понятию в отношении *подчинения,* а к понятию, представляющему другой член деления, в отношении *соподчинения.*

Члены деления получаются через ограничение делимого понятия рядом видовых различий, одинаково подчиненных какому-либо одному понятию, которое называется *основанием деления.* Если треугольники делят на прямоугольные, остроугольные и тупоугольные, то основанием деления здесь служит «величина угла», делимым понятием — «треугольник», членами деления являются понятия «прямоугольный треугольник», «остроугольный треугольник», «тупоугольный треугольник».

Отсюда формула классификации или деления: A есть Aa, Ab, Ac. Здесь A — делимое целое, Aa, Ab, Ac — члены деления, которые суть виды A; a, b, c — видовые различия; x — основание деления, т. е. понятие, которому подчинены *а, б, с.*

Одно и то же понятие может делиться по разным основаниям. Но каким бы ни было основание деления, оно должно отвечать цели классификации, которая состоит в раскрытии объема понятия, а не только в предоставлении возможности определить, к какому виду относится неделимое того или иного рода. Основанием деления должен быть не произвольно взятый признак, а существенный признак классифицируемых объектов.

В противном случае классификация будет *искусственной*, в качестве примера которой часто приводят классификацию растений по числу тычинок шведским ученым Линнеем. Этот признак был взят им в качестве основания классификации произвольно, т. е. не сообразуясь со степенью сходства индивидуумов в каждой группе, составляющей вид делимого целого. В результате растения, сходные в том признаке, имели очень мало сходства во всех других отношениях (например, в одной группе оказались дуб и фиалка), а растения, имеющие сходство во многих отношениях (например, злаки), оказались распределенными по разным группам.

Классификация, в которой виды и подвиды, а также индивидуумы тем ближе стоят друг к другу, чем более они сходны, называется *естественной*.

Ввиду того, что существенные признаки характеризуются тем, что сходство в них влечет за собой сходство во множестве других признаков, то в качестве основания в естественной классификации должно браться понятие, которое имеет отношение к большинству существенных свойств делимого целого. Естественная классификация отличается от искусственной гораздо бо́льшим количеством суждений, которые можно высказать о всех индивидуумах одного класса.

Из сказанного не следует, что искусственная классификация совершенно бесполезна. Самым ярким примером искусственной классификации могла бы быть классификация людей по их именам, так как люди, имеющие общее имя, не имеют ничего общего между собой. Поэтому в целях раскрытия объема понятия такая классификация бесполезна, но для определенных практических целей, например в целях более быстрого нахождения людей в определенных списках, эта классификация играет полезную роль.

2. **Виды классификаций.** *Классификация предметов по наличию и отсутствию признаков.* Данная классификация именуется обычно дихотомическим делением понятий. Сущность ее состоит в том, что множество объектов делится на два класса, из которых один имеет определенное свойство, а второй не имеет его, причем этот второй класс может быть подразделен, в свою очередь, на два еще более мелких класса, из которых опять-таки один имеет некоторое свойство, а другой не имеет его, и т. д.

Такая классификация исчерпывает весь объем делимого понятия, но она имеет тот недостаток, что *отрицательный член* в ней является слишком неопределенным, требующим дальнейшего раскрытия его объема. Так, если люди делятся на русских и не-русских, то второй член здесь составляет бо́льшую часть объема понятия «человек», которое недостаточно раскрыто со стороны объема из-за неопределенности второго члена деления.

Классификация предметов по видоизменению признака. Избежать недостатка дихотомического деления позволяет метод классификации предметов по видоизменению признака. Он состоит в том, что члены деления представляют собой такие совокупности предметов, в каждой из которых общий для всех совокупностей признак проявляется по-особому, с теми или другими вариациями.

Но всегда ли имеется сформировавшееся понятие о классе предметов, подразделяемых на подклассы посредством этого второго метода классификации? Всегда ли выделенным посредством данного метода членам деления соответствуют понятия? На эти вопросы следует ответить отрицательно.

О том, что классифицируемые объекты далеко не всегда в своих общих существенных признаках бывают фиксированы в головах ученых в виде соответствующего понятия, свидетельствует история классификации объектов в различных науках, история непрерывного изменения классификаций, включая и изменения, являющиеся коренными. Об этом, в частности, свидетельствуют перевороты, имевшие место в классификациях растительного и животного миров, в классификациях наук.

Назначение всякой классификации в науках заключается прежде всего в том, чтобы быть средством лучшего познания изучаемых объектов, о которых до классификации еще не имелось сформировавшихся понятий. И это не противоречит тому, что при любой классификации, удовлетворяющей логическим правилам деления, требуется с самого начала выбрать основание деления. Последнее нередко устанавливается в соответствии с некоторым представлением о внешнем облике предметов, а не в соответствии с определением действительно существенных свойств предметов, которые служат реальной основой для образования понятия о них.

Поэтому может случиться, что с расширением наших эмпирических сведений найдутся виды, которые не подходят под принятое определение рода. Такие часто бывают.

При эмпирическом обнаружении какого-либо вида, который не подходит под принятое определение рода, создается ситуация, требующая либо изменить последнее для оправдания нового количества видов, либо не включать новый вид в род, если считается целесообразным сохранить его старое определение. И до тех пор, пока точное общее понятие относительно классифицируемых предметов не выработано, включение или невключение вновь открытого вида наряду с ранее известными в общий класс определенного рода предметов оказывается в значительной степени делом случая.

В наше время при построении классификационных систем специалисты в разных областях науки все более используют принцип развития, т. е. кладут в основу той или иной классификации развитие высших форм исследуемых объектов из низших.

Это позволяет предотвратить случайности и вообще многие неправильности в классификации изучаемых предметов. Однако такой метод сам по себе, конечно, не может автоматически привести к правильной классификации, которая стала бы общепринятой, если речь идет о достаточно сложных и весьма многочисленных разновидностях какого-либо рода предметов, например всевозможных растительных или животных организмах.

Так, в биологических науках уже с времен Дарвина, точнее, со времени появления его труда «Происхождение видов» (1859), предпринимаются попытки построить классификацию растительного мира, отражающую процесс его развития. Но общепринятой системы растений еще не создано. И причина этого заключается в сложности самого объекта исследования, включающего около 400 тысяч известных видов растений.

Конечно, в таких все же относительно разработанных системах, как классификации растений и животных в биологии, сформировались и основные понятия — понятия «растение» и «животное», однако в этих системах найдется, видимо, и немало разновидностей растений, относительно которых не имеется достаточно точных, сформировавшихся понятий, особенно относительно всякого рода переходных форм.

Ни в какой области объект познания не может быть сразу воспроизведен мышлением во всей его конкретности, во всем богатстве его сторон и их разнообразных взаимоотношений. Это подтверждается примерами из различных областей познания. Так, в геометрии не начинают с некоторого конкретного пространственного образа, а знакомятся сначала с тем, что такое точка, линия, плоскость, плоские фигуры, причем из последних первоначально изучают наиболее простые и т. д. В физике также изучают природу отдельных свойств предметов, отдельных явлений (магнетизм, электричество и т. д.) в отвлечении от многообразных связей, переплетений, в которых они находятся в конкретной действительности.

В этом процессе синтетического познания, в процессе восхождения мышления от абстрактного к конкретному определенная роль принадлежит методу классификации изучаемых явлений действительности.

После того как становится известно, что некоторый круг предметов обладает некоторой простой, элементарной всеобщей определенностью (предполагается, что в форме *представления* предметы эти нам знакомы), следующим шагом по пути их познания должно быть их подразделение, классификация. Причем на данной стадии, подразделяя предметы, мы еще не можем сразу вскрыть их внутреннюю природу, их глубокие отношения как разных видов, отличных от других видов предметов. Короче говоря, мы не можем сразу же в результате классификации составить понятие, отражающее природу, сущность классифицируемых предметов.

На данной стадии подразделением предметов выполняется познавательная задача, состоящая в том, чтобы упорядочить найденные в эмпирическом материале объекты, отличающиеся теми или иными особенными, хотя бы внешними чертами, и для групп предметов с этими особенностями найти всеобщие определения посредством сравнения указанных предметов.

Эти определения, т. е. общие признаки, могут быть, конечно, разнообразными, и каждый из них приниматься в качестве основания деления, а следовательно, столь же многообразными могут быть и сами деления, классификации в соответствии с принятыми основаниями.

В результате проведенной таким образом классификации никакие внутренние отношения между членами деления (видами) не вскрываются. Отношения между членами деления, которое выясняется при этом, сводится к тому, что они, т. е. члены деления, должны определяться относительно друг друга по принятому основанию деления. В зависимости от того, по какому из разнообразных общих признаков производится деление, члены его координируются друг с другом то на одной, то на другой плоскости.

Деление по разным основаниям обусловливается не обязательно внешним для предмета обстоятельством или соображениями субъекта. Его необходимость вызывается часто природой самих объектов, которые находятся в разнообразных связях и отношениях между собой. И если во взаимосвязи определенного предмета с одной группой предметов имеют существенное значение одни его признаки, свойства, то во взаимосвязях с другими видами деления эти же свойства могут оказаться несущественными, просто бесполезными.

Кроме двух рассмотренных видов классификации различают классификацию в широком смысле слова и узком смысле слова. Классификация в широком смысле слова есть распространенное деление, в котором члены деления, полученные в результате ограничения какого-либо понятия видовыми различиями, в свою очередь подвергаются делению, что называется подразделением, а члены подразделения, возможно, также подразделяются на подчиненные им виды.

Если несколько классификаций одного и того же множества предметов по разным основаниям находятся рядом друг с другом, то они называются *соразделениями.* Таковы, например, классификации треугольников на: 1) равнобедренные, равносторонние и неравносторонние и 2) остроугольные, прямоугольные и тупоугольные.

Классификация может осуществляться и так: первоначально какое-либо понятие делится на виды по одному основанию, а затем каждый член деления, в свою очередь, подразделяется с точки зрения основания второго соразделения; получившиеся в результате члены делятся по новому основанию. Такое распространенное деление называется классификацией в узком смысле слова.

3. **Правила классификации.** Классификация с логической точки зрения может быть правильной и неправильной. Логически состоятельная классификация должна удовлетворять следующим правилам:

1) классификация должна быть адекватной, или соразмерной. Она является таковой, если члены деления в своей совокупности исчерпывают объем делимого целого и если никакое понятие, не подчиненное делимому целому, не подведено под члены деления. Если члены деления не исчерпывают объем делимого целого, то деление является слишком *узким*, а если оказывается лишний член деления, то оно называется слишком *широким*. Пример слишком широкого деления: леса бывают либо хвойные, либо лиственные, либо хвойные, либо строевые;

2) классификация должна производиться по одному основанию. Только что приведенный пример слишком широкого деления является одновременно и примером, в котором не соблюдается это второе правило;

3) основание классификации должно быть не произвольно взятым понятием, а относящимся к сущности делимого целого. Примером несоблюдения этого правила было бы, например, деление всех людей по цвету волос;

4) члены деления должны исключать друг друга, т. е. должны быть несовместимыми понятиями. Деление книг на полезные и приятные было бы примером несоблюдения этого четвертого правила;

5) классификация в узком смысле слова должна быть *непрерывной,* т. е. переходящей постепенно от членов, получаемых прямо через ограничение исходного понятия, к членам, находящимся на более низких ступенях подчинения. Несоблюдением этого правила было бы деление явлений природы на животных, растения и металлы.

Формально-логические правила и диалектические принципы классификации. О формально-логических правилах в литературе по логике говорится как об обязательных для любой классификации объектов, претендующей на то, чтобы быть правильной во всех отношениях.

Встает вопрос: можно ли классифицировать какие-либо объекты на основе принципа субординации, выполняя в то же время правила подразделения, устанавливаемые формальной логикой. Обязательно ли выполнение последних? Как совместить выполнение правил формальной логики о том, чтобы деление производилось по одному основанию, чтобы члены деления исключали друг друга, чтобы объем делимого понятия был исчерпан членами деления, чтобы основание деления было ясным, с фактом отсутствия в природе резких разграничительных линий между разными видами растений, животных, химических элементов и т. д.?

Для ответа на первый вопрос необходимо в соответствующем плане рассмотреть некоторые реальные классификации, основанные на принципе субординации, т. е. располагающие объекты в порядке возникновения одних (высших) из других (низших).

Примером такого рода классификации может служить подразделение К. Марксом капиталистических форм и стадий промышленности на капиталистическую кооперацию, мануфактуру и крупную машинную индустрию. По К. Марксу, из простой капиталистической кооперации вырастает капиталистическая мануфактура, а из мануфактуры — крупная машинная индустрия, т. е. фабричное капиталистическое производство. Здесь налицо последовательное выведение каждой высшей формы из низшей. Иначе говоря, перед нами классификация форм капиталистической промышленности по принципу субординации. Однако в этой классификации выполняются также и перечисленные выше формально-логические правила. Это обстоятельство косвенно отмечал и В. И. Ленин, когда противопоставлял данную классификацию немарксистским классификациям соответствующего материала.

«Изложенные в трех последних главах данные, — писал В. И. Ленин, — показывают, по нашему мнению, что классификация капиталистических форм и стадий промышленности, данная Марксом, более правильна и более содержательна, чем та, распространенная в настоящее время, классификация, которая смешивает мануфактуру с фабрикой и выделяет работу на скупщика в особую форму промышленности...».[38] Неправильность немарксистских классификаций капиталистических форм промышленности, на которую указывает здесь В. И. Ленин («смешивает мануфактуру с фабрикой и выделяет работу на скупщика в особую форму промышленности»), и есть нарушение формально-логических требований правильного подразделения.

Аналогичный упрек (в нарушении требования формальной логики о том, чтобы члены деления исключали друг друга и чтобы деление производилось по одному основанию) высказывал В. И. Ленин народникам, говоря: «...излюбленный прием нашей народнической экономии состоит в том, чтобы свалить в кучу все это бесконечное разнообразие форм промышленности, назвать эту кучу „кустарной", „народной" промышленностью...».[39]

Одновременно заметим, что если какой-либо сложный объект рассматривается теоретически, то независимо от степени его сложности те или другие его стороны, части не обязательно

---

[38] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 3, с. 551.
[39] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 2, с. 400.

в целях научного анализа классифицировать по принципу субординации, потому что этот же анализ требует рассмотрения и тех сторон предмета, которые возникают одновременно, но отличаются друг от друга.

В этой связи мы опять укажем на одну Марксову классификацию экономических явлений, о которой В. И. Ленин писал: «...Маркс делит весь общественный продукт на два подразделения по натуральной форме продукта: I) средства производства; II) предметы потребления. Затем в каждом из этих подразделений продукт делится на три части по элементам стоимости: 1) постоянный капитал; 2) переменный капитал; 3) сверхстоимость».[40]

В таких случаях формально-логические правила деления, конечно, также не могут быть нарушены. И когда П. Струве вместо подразделения общественного продукта, данного К. Марксом, предложил свое подразделение (на средства производства, предметы потребления и прибавочную ценность), то В. И. Ленин сразу указал на его непригодность, поскольку оно не удовлетворяло правилам деления, о которых говорится в формальной логике. «Не ясно ли, — писал В. И. Ленин по поводу предложения П. Струве, — что подобное деление — несостоятельное логически (ибо оно смешивает деление по натуральной форме продукта с делением по элементам стоимости) — *затемняет* процесс общественного обмена веществ?».[41]

Таким образом, соблюдение формально-логических правил деления оказывается необходимым в двоякого рода классификациях — в классификации по принципу субординации и в классификациях, в которых этот принцип не применяется, поскольку классифицируются объекты, возникшие одновременно, т. е. не различающиеся в генетическом плане.

Если, следовательно, в классификации принцип субординации выступает в единстве с формально-логическими правилами, то может возникнуть вопрос, осуществимо ли это единство в случаях, когда члены классификации представляют собой, с одной стороны, группы, включающие только одинаковые предметы с точки зрения отношения их к одному предметному свойству, а с другой стороны, группы, состоящие из неодинаковых предметов по их отношениям к свойствам, которыми обладают предметы других групп.

Так, все леса, как известно, можно разделить на 1) хвойные, 2) лиственные и 3) смешанные. Производственные отношения могут быть разделены на 1) отношения господства и подчинения, 2) отношения сотрудничества и взаимопомощи и 3) переходные.

---

[40] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 4, с. 76.
[41] Там же, с. 76.

Нетрудно видеть, что в этих примерах выполняются формально-логические правила деления: оно производится по одному основанию, члены деления исключают друг друга, все члены деления указаны.

Аналогичным образом обстоит дело и в случае деления химических элементов на металлы, неметаллы (металлоиды) и переходные элементы, составляющие промежуточные группы между металлами и неметаллами. В эти последние группы входят элементы, обнаруживающие в одних условиях свойства металлов, а в других — свойства неметаллов.

Когда в химии еще не были известны переходные элементы, то естественным было деление всех элементов только на металлы и неметаллы. Теперь же их делят на три группы. В первом случае деление не было исчерпывающим, поскольку оно не охватывало большинства химических элементов. Такое деление не соответствовало действительности, что обусловливалось отсутствием достаточных эмпирических данных для более правильной классификации.

Далее. Существование промежуточных, переходных явлений в природе не позволяет точно устанавливать, где кончается один класс предметов и где начинается другой класс предметов, и это не может мешать нам рассуждать о соответствующих предметах по закону исключенного третьего. О каждом предмете мы можем высказывать два суждения: 1) «данный предмет — металл», (2) «данный предмет — неметалл», из которых одно обязательно будет истинным, а другое — обязательно ложным.

Разумеется, что говорить о невозможности истинности обоих суждений не то же самое, что говорить (неправильно) о наличии в природе только двух видов химических элементов: металлов и неметаллов (металлоидов). Истолкование фактов существования промежуточных явлений наряду с явлениями, выделяемыми по каким-либо отличительным признакам, в том смысле, будто эти факты показывают на всеобщность закона исключенного третьего, основаны на недоразумении. В данном случае утверждение чего-либо и отрицание того же самого смешиваются с утверждением альтернативного характера иного рода, а именно — с утверждением о принадлежности каждого из предметов рассматриваемой области только к одному из двух каких-либо классов в соответствии с наличием у них особых отличительных признаков. Иначе говоря, не всякое альтернативное отношение есть отношение суждений, которые не могут быть одновременно и истинными, и ложными.

Как отражается факт установления промежуточных форм явлений на изучении какой-либо их области, ярко и глубоко показал в свое время Ф. Энгельс. Приведем одно из его высказываний: «...с тех пор, как биологию стали разрабатывать в свете эволюционной теории, в области органической природы также начали исчезать одна за другой застывшие разграничительные линии классификации; с каждым днем множатся почти не поддающиеся классификации промежуточные звенья, более точное исследование перебрасывает организмы из одного класса в другой, и отличительные признаки, ставшие почти символом веры, теряют свое безусловное значение: мы знаем теперь, что существуют млекопитающие, кладущие яйца...».[42]

§ 36. Определение

а) **Понятие определения.** Слово «определение» многозначно в языке вообще и в логике в частности. В логике им обозначают и определенный логический прием, имеющий целью раскрытие содержания понятия, и результат применения данного приема; этим словом обозначают и утверждение, раскрывающее сущность каких-либо объектов, и указание несущественных сторон предметов, в том числе таких, которые недостаточны для отличения предметов от всех других, и называются поэтому неполными определениями. К ним прибегают обычно тогда, когда степень исследования предметов недостаточна. Но на определенном уровне знаний мы можем формулировать определение, раскрывающее сущность определяемых предметов и отличие их от всех других предметов.

Такие определения мы будем называть определениями в собственном смысле, строго логическими определениями, или дефинициями. В каждой дефиниции имеется определяемое понятие (дефиниендум) и определяющее понятие (дефиниенс).

Распространенным видом дефиниции является определение через указание рода и видового отличия. Формой этого вида определения является суждение, в котором субъект и предикат имеют одно и то же содержание.

Понятие, представляющее собой субъект суждения, одновременно есть и его предикат, но в последнем в содержании понятия выделены всеобщность и особенность (иначе — родовой признак и видовое отличие), в то время как в субъекте это содержание дано в единстве, без словесного фиксирования каждого из этих признаков в отдельности.

Такое суждение можно обозначить формулой $S = Abcd$, где S — понятие, выполняющее роль субъекта суждения, а $Abcd$ — совокупность признаков того же понятия, из которых A представляет ближайший род, bcd — видовое отличие. Следовательно, в каждом определении имеются определяемое понятие (субъект определяющего суждения), содержание которого, в отличие от содержания определяемого, словесно расчленено.

В науках определения, аксиомы и постулаты выступают иногда как исходные положения, на основе которых развертывается все здание науки или какого-либо из ее разделов. Таковы,

---

[42] Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. т. 20, с. 13—14.

например, в математике определения параллельных прямых линий, точки и некоторые другие. Эти определения, играющие роль начал в определенных науках или каких-либо теориях, сами в рамках данных наук и теорий не выводятся путем доказательства. Но это, конечно, не означает, что истинность определений вообще не доказывается. Подобно аксиомам определения могут не обосновываться только в рамках отдельной науки, где они принимаются в качестве предпосылок. В другой области эти предпосылки будут следствиями определенного познавательного процесса, опирающегося на практику. Так, для того, чтобы сформулировать определение параллельных линий и даже для образования самого понятия параллельности линий, в качестве предпосылок требуется абстрагирование от качественных определенностей вещей, от их объема, имеющего три измерения, и т. д., т. е. здесь предполагается осуществление процессов, являющихся предметом изучения логики.

Определения, соответствующие сути предмета, стремится сформулировать каждый исследователь в любой отрасли науки, но такие определения обычно невозможны на первых этапах изучения предмета, когда еще не вскрыты его существенные признаки, обусловливающие все остальные. Назначение определений в том и состоит, что они подытоживают главное в исследовании предмета. Знание главных, основных черт изучаемых явлений помогает выявить их менее существенные, производные признаки. Заранее, до всестороннего изучения самих предметов, конечно, не может быть доказано, какие признаки в предмете существенные и какие несущественные. Поэтому на разных ступенях исследования каких-либо явлений часто в течение многих десятилетий, столетий и даже тысячелетий в науке пользуются определениями, которые впоследствии оказываются несостоятельными или неточными. В частности, могут быть неверно указаны ближайший род или видовое отличие, а иногда и то и другое одновременно. В таких случаях определение оказывается неистинным и может не соответствовать даже другим положениям данной науки. Об этом свидетельствуют многие примеры из истории науки, и в частности такой. Еще при жизни Ф. Энгельса ученые определяли рыб как позвоночных животных, дышащих всю жизнь исключительно жабрами, и в то же время считали рыбами животных, имеющих наряду с жабрами хорошо развитые легкие.

Трудность важного при определении различения существенных и несущественных признаков неодинакова для разных предметов. В этом отношении все предметы можно разделить на три категории:

1) предметы, представляющие собой продукты целесообразной человеческой деятельности. Цель, которой должны служить эти предметы, и составляет ту существенную особенность, которую необходимо учитывать при дефинициях. Определяя, на-

пример, термометр, мы говорим, что это прибор для измерения температуры, т. е. указываем цель, для которой он служит. Так же мы определяем телескоп, дом, самолет и все другие предметы, сделанные человеком;

2) геометрические предметы, представляющие собой абстрактные пространственные определения, сходные с продуктами человеческой деятельности в том отношении, что их специфическое отличие, которое указывается в определении, в них самих имеет свою простую реальность, остающуюся одной и той же во всех случаях. Простая в этом смысле определенность геометрического квадрата, т. е. равенство сторон прямоугольника, присуща всякому квадрату;

3) конкретные явления природы и общественной жизни. Определение их имеет специфическую трудность по сравнению с определением двух ранее упомянутых категорий предметов. Она состоит, во-первых, в том, что черты объектов, указываемые в дефиниции, не обязательно встречаются в каждом представителе класса определяемых объектов (они могут не встречаться, например, при отклонениях в развитии организмов), либо эти признаки могут в отдельных случаях оказаться недоразвитыми или захиревшими, что может наталкивать на мысль о несостоятельности определения, в котором не учтены эти особые случаи. Во-вторых, для подтверждения того, что в определении конкретных природных или общественных явлений схвачены действительно существенные черты предмета, а не его внешние приметы, требуется вывести это определение из конкретного характера предмета. Но это значит, что надо проанализировать, обосновать зависимость многочисленных конкретных свойств предметов от простых определенностей, входящих непосредственно в дефиницию. Чтобы дать, например, определение человека, вскрывающее его сущность, надо было указать свойство, которое было бы прежде всего всеобщим, присущим всем людям и только им. Но в их числе может оказаться свойство, именуемое в логике *неотделимой случайностью,* которая может служить внешней приметой для отличения человека от других животных, однако не является существенным признаком понятия «человек». Выделение же существенных признаков, отличающих человека, — способность производить орудия труда и членораздельная речь — потребовало анализа зависимости многообразных признаков от других, что оказалось возможным сделать только в XIX в.

В геометрических предметах рассмотрение многообразных качественных определений заранее исключено. Если существенные признаки предметов еще не выделены в процессе их изучения, то могут формулироваться так называемые случайные определения, т. е. определения, основанные на несущественных, случайных признаках, являющихся внешними приметами для познающего. Таких определений может быть много, в то время как определение, вскрывающее сущность предмета, т. е. его понятие, может быть только одно.

Определение, указывающее на способ возникновения предмета, называется генетическим. Оно является разновидностью определения через указание рода и видового отличия. В качестве примера данной разновидности может служить следующее определение окружности: «Окружность есть замкнутая кривая, образованная движением на плоскости точки, сохраняющей одинаковое расстояние от центра».

Если в определении вскрывается сущность предмета, это значит, что наука сформировала понятие, в котором отражается эта сущность. При наличии понятий, отражающих сущность предмета, нет смысла противопоставлять содержание понятия предмету, если речь идет о том, чтобы дать определение предмета. Поэтому, в частности, В. И. Ленин употреблял как равнозначные выражения «определение империализма» и «определение понятия империализма». Учитывая это обстоятельство, следует сказать, что определение есть логическая операция, посредством которой раскрывается содержание того или другого понятия, или есть указание существенных, характерных признаков предмета, отображаемого в понятии.

Каждое определение, разумеется, не может охватить всех признаков предмета, поскольку этих признаков обычно бывает бесчисленное множество у всякого явления. Поэтому перед определением никогда не ставится задача указать все признаки предметов. Понятие отображает только существенные признаки явлений действительности. Определение же есть логическая операция, которая применяется для раскрытия содержания понятия. Поэтому в определении не могут быть указаны все особенности определяемого явления, все признаки предмета.

Если мы считаем, что определение призвано раскрыть содержание понятий, т. е. указать признаки предмета, отраженные в понятии, то мы этой цели можем достигнуть только в том случае, если действительно укажем признаки понятия полностью. Если же мы этих признаков полностью не укажем, то нельзя говорить о том, что мы своим определением раскрыли содержание понятия.

Ввиду того что определение представляет собой суждение, посредством которого раскрывается содержание понятий, всякое определение представляет собой краткую формулу, указывающую общие свойства всех предметов, подходящих под определение понятия. При этом должны быть указаны свойства, необходимые и достаточные для того, чтобы отличить все определяемые нами предметы от всех других предметов. Указать необходимые и достаточные признаки — значит указать признаки, составляющие содержание определяемого понятия. Поэтому вряд ли следует искать какие-либо другие признаки, кроме раскрываемых в определении понятия, если не говорить о тех, которые непосредственно выводятся из признаков, указанных в определении.

И действительно, в определении мы указываем все признаки понятия, исключая так называемые производные признаки, которые, как правило, не указываются в определении, но могут и указываться.

Производные признаки (если их даже не указывают в определении) фактически даны в определении в неявной форме, подобно тому как в энтимеме в неявной форме дано неформулируемое в особом предложении суждение, входящее в состав соответствующего полного силлогизма. Если, например, параллелограмм определяют как четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны, то в этом определении в неявной форме содержится также и тот признак, что диагонали геометрической фигуры при их пересечении делят друг друга пополам. Или, если человека определяют как животное, способное к изготовлению орудий труда, то в таком определении имплицитно мыслятся все другие признаки, которые входят в содержание понятия «человек».

Тот факт, что в дефиниции дефиниендум имеет то же содержание и тот же объем, что и дефиниенс, сокращенно выражается формулой $Dfd \equiv Dfn$, где Dfd обозначает дефиниендум (*Definiendum*), Dfn — дефиниенс (*Definiens*), «$\equiv$»— знак тождества. В сокращенных записях определений в качестве знака тождества употребляется также знак «$=$».

В науках часто делаются утверждения, в которых высказывается мысль о том, что содержание какого-либо термина a согласно определению тождественно содержанию сложного термина b. Сокращенно это выражается формулой $a = b$, которая читается: «a есть по определению b».

б) **Номинальные и реальные определения.** Как известно, языковой формой выражения понятия является *имя*. Если определение отвечает на вопрос, какое понятие обозначается этим именем, то оно называется *номинальным*. Особенность номинального определения состоит в том, что в нем раскрытие содержания понятия не соединяется с указанием на соответствие определяемого понятия действительности, т. е. на то, что понятие не является пустым. Определение, соединенное с указанием на то, что определяемое понятие непустое, называется *реальным*.

Данная отличительная черта реального определения не является формальным элементом его структуры. Поэтому она выясняется из контекста, в котором данное определение встречается в науке.

Следует заметить, что задача, стоящая перед номинальным определением, — раскрытие содержания понятия, обозначенного его наименованием, — решается и в каждом реальном определении, в определении, предназначенном непосредственно для указания существенных признаков реальных предметов.

Номинальное же определение не решает задач реального определения, но тогда, когда номинальное определение раскрывает содержание непустого понятия, оно, как и реальное определение, может указывать существенные признаки понятия, не ручаясь за его состоятельность.

От *номинального* определения следует отличать *вербальное*. Последнее из этимологического происхождения слова разъясняет понятие, обозначенное этим словом. Например, лектор есть человек, читающий лекции. Эти определения способны только подготавливать настоящее определение понятия, но не могут заменить его.

в) **Правила определения и ошибки, возможные в нем.** В формально-логическом плане от правильного определения требуется:

1) чтобы оно было соразмерным. Это имеет место тогда, когда определяемое и определяющее понятия имеют одно и то же содержание, а объем первого равен объему второго. Таковы определения: «Империализм есть монополистический капитализм», «Квадрат есть прямоугольник с равными сторонами».

Невыполнение этого правила бывает в *слишком широком* и в *слишком узком* определениях. В первом из них объем определяющего понятия больше объема определяемого. Пример: «Мораль есть форма сознания». В слишком узком определении объем определяющего понятия меньше объема определяемого. Пример: «Человек есть живое существо с голубыми глазами, способное к членораздельной речи».

Слишком широкое определение указывает *слишком мало* признаков, и слишком узкое — *больше, чем требуется*. Вследствие этого в первом случае определение не допускает чистого обращения, а во втором — чистого противопоставления предикату. В обоих случаях получаются суждения, в которых не выполняется задача определения. Но в первом случае суждение является истинным, а во втором — ложным. Это правило вытекает из самой сущности определения;

2) чтобы определение не заключало в себе круга. Круг получается тогда, когда одно понятие определяют посредством другого, а последнее — при помощи первого. Если вращение определить, как движение вокруг своей оси, а ось, как прямую, вокруг которой осуществляется вращение, то мы будем иметь пример ошибки такого рода. Разновидностью круга в определении является тавтология. В последней определяемое понятие становится на место определяющего под своим собственным именем или под именем, синонимичным ему, т. е. определяемое определяется через само себя. Пример тавтологии: «Свет есть то, что освещает»;

3) чтобы определение положительных понятий не было отрицательным, т. е. не ограничивалось указанием на отсутствие

у определяемого объекта каких-либо признаков. В отрицательном определении неосуществима цель определения, состоящая в установлении пределов содержания и объема понятия. Пример отрицательного определения: «Физика не является наукой об общественных явлениях»;

4) чтобы определение было *кратко и точно*. Согласно этому правилу определение должно быть свободно от метафорических, фигуральных выражений. Наличие последних превращает логическое определение в простой образ. Эти образы могут выражать верную мысль, как, например, тогда, когда верблюда называют кораблем пустыни, а детей — цветами жизни, но цели определения они не соответствуют. Согласно этому правилу определяемое понятие не должно определяться менее ясным понятием, чем оно само.

Иногда встречаются попытки деления всех определений на формально-логические и диалектические, а в связи с этим и утверждения о применимости четырех рассмотренных правил только к определениям первого вида, т. е. к формально-логическим определениям. Основанием такого деления некоторые авторы фактически называют различное отношение определений к имеющейся взаимосвязи между предметами: формально-логическим дефинициям приписывается функция исключения признаков, раскрывающих взаимосвязь предметов, а так называемые диалектические определения якобы призваны раскрыть эту взаимосвязь Но если обратиться к примерам определений в науках, то при правильном их истолковании нельзя найти подтверждения такому мнению. Не говоря уже о генетических определениях, в которых прямо указывается на происхождение или способ образования предметов, а следовательно, на их связь, такое указание имеется и в любых негенетических дефинициях. В самом деле, в ленинском определении «Империализм есть монополистический капитализм» фактически указывается связь капитализма немонополистического и капитализма монополистического.

Вспомним известное ленинское положение о том, что в любом простом предложении — «листья дерева зелены», «Иван есть человек», «Жучка есть собака» и т. п. — есть диалектика. С данным положением, разумеется, несовместима мысль об исключении связей предметов в суждении-определении (дефиниции). И из высказывания Энгельса о недостаточности дефиниций для выражения существа какого-либо объекта во всех его связях, опосредованиях и формах развития вовсе не следует, что существуют два особых вида определений — формально-логические и диалектические. Речь может и должна идти лишь о том, что от дефиниций вообще нельзя требовать того, чтобы в них выражалась вся система знаний, которая содержится в той или иной теории, а не о том, что существуют особого рода диалектические определения, способные выразить всю полноту знаний об объекте исследования.

Все сказанное, конечно, не означает неправомерности постановки вопроса о формально-логических и диалектических требованиях к определениям понятий, объектов исследования. Суть этого вопроса заключается в том, в какой связи находятся известные формально-логические правила определения понятий и методологические принципы материалистической диалектики, в первую очередь те из них, на которые обращал внимание В. И. Ленин в работе «Еще раз о профсоюзах...», указывая, что «абстрактной истины нет, истина всегда конкретна» и что диалектическая логика требует изучать предмет во всех связях, в развитии, с учетом всей человеческой практики, которая должна войти в определение предмета.

Эти методологические требования необходимо соблюдать в каждом отдельном случае вместе с выполнением формально-логических требований к определению понятий. Невозможно ведь выполнить указанные методологические требования диалектической логики, нарушая одновременно правила определения понятий, выработанные формальной логикой.

В литературе приводились многочисленные примеры критики классиками марксизма, особенно В. И. Лениным, определений экономических, социологических и других понятий за то, что в них не выполнялись какие-либо формально-логические правила определения, следствием чего были ошибки, называемые в логике «кругом в определении», «несоразмерностью определений» и т. д. А так как в этих примерах речь шла по преимуществу об определениях сложных объектов социальных наук, для успешного изучения которых необходим диалектический метод, то отсюда вытекает, что совершенно ложна мысль о необходимости применять формально-логические правила определения лишь на низших ступенях познания. Эта мысль иногда возникает вследствие стремления сравнивать формальную логику и диалектику в несравнимом для них отношении: в результате попытки показать, будто диалектика по сравнению с формальной логикой глубже изучает ряд вопросов (например, вопросы о движении предметов действительности, о существовании объективной истины и т. д.), которые на самом деле не являются предметом формальной логики.

Правила определения, о которых идет речь в формальной логике, являются общими указаниями на то, как должны быть связаны в краткой формулировке понятия, которые предполагаются данными, готовыми, т. е. такими, формирование которых считается законченным. Без такого постулирования законченности мысли (понятий) формально-логические правила теряли бы смысл. Конечно, такое постулирование есть абстракция, отвлечение от фактического развития понятий. Но без этой абстракции формальная логика не может строить свою теорию дефиниций, так как без нее (абстракции) невозможно было бы говорить об общих требованиях (правилах) к определению понятий; в противном случае мы оказались бы перед необходимостью указывать одни видовые признаки определяемого предмета в одном случае и другие — в другом случае, руководствуясь только своими представлениями о содержании предмета, независимо от того, каков предмет в действительности.

Из сказанного следует, что в научных исследованиях должно соблюдаться единство формально-логических правил определения и методологических принципов диалектики.

Было бы, однако, большой ошибкой делать из сказанного вывод, что все понятия определимы через указание рода и видового отличия. Этот прием, конечно, неприменим к категориям и к единичным понятиям, к индивидуумам, поскольку для первых не существует родовых понятий, а для вторых — видовых отличий.

Содержание категорий раскрывается при помощи неявных определений, т. е. определений через отношения одного понятия к другому. Примером таких определений является известное определение материи В. И. Лениным как объективной реальности, существующей вне нашего сознания.

Для раскрытия содержания единичных понятий применяются приемы, сходные с определениями, являющиеся предметом рассмотрения в следующем пункте.

г) **Приемы, сходные с определением.** Так как строго логическое определение не всегда возможно и не всегда является наиболее удобным средством раскрытия содержания понятий, в исследованиях, в изложениях содержания объектов применяются приемы, сходные с определением. К ним относятся:

1) *указание*. Этот прием, рассматриваемый нередко в литературе под именем остенсивного определения, состоит в разъяснении значения слова путем показа предметов, называемых этим словом. К этому приему мы прибегаем, в частности, при обучении детей языку, когда указываем на предмет и одновременно произносим его наименование;

2) *описание* — состоит в указании внешних признаков предмета, явления, события. Оно имеет целью заменить непосредственное созерцание объектов и является как бы воссозданием единичного предмета, например города, военного сражения, отдельного лица;

3) *характеристика* — состоит в раскрытии наиболее выдающихся признаков (примет) предмета. Как и описание, она применяется к единичным объектам: к отдельным лицам, событиям, городам и т. д.;

4) *различение* — показывает отличие каких-либо объектов не от всех других, а лишь от наиболее сходных с ними. Например, понятие отличается от суждения отсутствием утверждения или отрицания о явлениях действительности. Различение применимо,

в частности, тогда, когда различные понятия выражаются одним словом и когда разными словами выражается одно и то же понятие;

5) *пояснение* — состоит в раскрытии не всего содержания понятия, а лишь части его с какой-либо определенной целью, которая может состоять в том, чтобы подготовить строго логическое определение. Пример: способность к абстрактному мышлению является признаком, отличающим человека от животных;

6) *сравнение* — применяется с целью пояснить одно понятие другим, более ясным, например абстрактное — конкретным. Примеры сравнений: «Религия — опиум народа», «Революции — локомотивы истории».

Значение определений заключается, с одной стороны, в том, что в них подытоживается главное в наших знаниях об исследуемых объектах, с другой стороны, в том, что они являются основой для дальнейшего развития наших знаний. Без них невозможно обойтись в любой науке и очень часто — в практической деятельности, например в судебной деятельности. Но содержащиеся в определениях знания составляют крайне незначительную часть всех знаний, имеющихся в науках. Поэтому в любой науке определения играют незначительную роль с точки зрения выражения объема знаний, но их роль очень велика с точки зрения предохранения нас от смешения понятий и отличения определяемых предметов от всех других. Их ценность заключается также в том, что они являются средством сокращения сложных рассуждений в научных теориях.

§ 37. Доказательство

Общее понятие о доказательствах. Высказав утверждение о чем-либо, мы нередко вынуждены заботиться об установлении его истинности. Те процедуры, с помощью которых устанавливается истинность какого-либо утверждения, в логике принято называть *доказательствами*. Доказательствами пользуются как в научной, так и в обиходной практике. Известные со школьной скамьи выражения «докажите, что...», «покажите, что...» как раз и являются побудителями к осуществлению доказательств. Общий смысл доказательства состоит в том, что мы определенным способом соотносим высказанное в утверждении с действительным положением вещей либо с другими утверждениями, истинность которых уже не вызывает сомнений. Например, в одних случаях, чтобы доказать истинность утверждаемого, производят физический или химический эксперимент, результаты которого, если они соответствуют высказанной в утверждении мысли, служат доказательством этого утверждения. Иногда, чтобы убедиться в истинности данного утверждения, достаточно простого наблюдения фактов, о которых сделано высказывание. Действительно, достаточно посмотреть в окно, чтобы проверить истинность высказывания «На улице идет дождь», относящегося к конкретной ситуации.

В других случаях, когда эксперимент и наблюдение почему-либо оказываются невозможными, подбирают другие истинные утверждения таким образом, чтобы они обосновывали истинность данного к доказательству утверждения необходимым образом.

В связи с указанными различиями в путях установления истины выделяют два способа их осуществления: 1) непосредственный способ; 2) опосредованный способ.

Непосредственный способ установления истины данного утверждения состоит в том, что в процессе практических действий осуществляется соотнесение утверждаемого с фактическим положением вещей. Видами таких практических действий могут быть наблюдения, эксперимент, демонстрация, измерение и другие эмпирические процедуры. Например, установленная во втором законе Ньютона зависимость между ускорением движущегося тела, его массой и силой, приложенной к телу, подтверждается демонстрацией соответствующего опыта. Утверждение об изменении длины металлического стержня при изменении его температуры доказывается тем, что стержень нагревают при различных режимах, каждый раз замеряя его длину, и затем сравнивают результаты измерений. Очевидно, что при непосредственных способах доказательства важную роль играют органы чувств.

Однако не всегда способ непосредственной проверки истинности утверждений бывает необходимым и возможным. Часто оказывается, что истинность утверждения о свойствах какого-либо объекта может быть доказана проще и с такой же степенью достоверности иначе, а именно на основе уже имеющегося знания, закрепленного в виде всевозможных законов и положений. Задача доказательства в этом случае будет состоять в обнаружении и демонстрации соотнесенности нуждающегося в доказательстве утверждения с этими истинными положениями. Такой способ установления истины называют *опосредованным*. Ясно, что при нем органы чувств уже не играют той роли, что при первом способе, зато оказывается важным показать, что связь между доказываемым утверждением и другими истинными утверждениями, используемыми для доказательства, имеет *необходимый* характер. Например, достаточно показать, что утверждение *A* является логическим следствием из истинных утверждений *B* и *C*, чтобы истинность *A* считать установленной. Для этой цели мы прибегаем к умозаключениям, которые показывают, каким именно образом *A* может следовать из *B* и *C*.

Сфера применения опосредованных доказательств в науке необыкновенно широка. Они оказываются незаменимыми в тех случаях, когда приходится утверждать о свойствах и отношениях объектов, находящихся вне пределов наших возможностей наблюдать и экспериментировать, или же тогда, когда речь идет об объектах, природа которых принципиально исключает эмпирические процедуры познания. Так, в теоретической астрономии, хотя эта наука и базируется на большом фактическом материале, многие истинные положения о процессах и явлениях мирового пространства являются результатом умозаключений. Аналогичным образом обстоит дело в теоретической физике, биологии, археологии и многих других науках, в которых используются оба способа получения истинных положений.

Способ установления истинности положений, опосредованный процессом умозаключений, особенно характерен для математических наук. Сформулированные в них утверждения о свойствах абстрактных объектов принципиально не допускают непосредственной проверки. Поэтому единственным путем установления их истинности являются доказательства по правилам умозаключений на основании уже доказанных или принятых как истинные утверждений.

В логике интересуются прежде всего опосредованными способами установления истинности суждений. Главное внимание уделяется доказательствам, основанным на дедуктивных умозаключениях, которые в дальнейшем мы будем называть просто доказательствами.

Доказательство есть логическая процедура установления истинности какого-либо утверждения при помощи других утверждений, истинность которых уже установлена.

При доказательствах ход мысли имеет различную направленность. Если необходимо доказать некоторое утверждение A, то иногда это делают путем подбора таких истинных утверждений B, C, D... и т. д., из которых A получается как логическое следствие. Этот ход мысли — от следствия к основанию — называется *регрессивным*. Иногда только с ним и связывают понятие доказательства, используя для его обозначения специальный термин: *обоснование*. В таком случае говорят, что утверждение A обосновано (доказано), если имеется хотя бы одно истинное утверждение B, из которого A получается как следствие по соответствующим правилам.

Наряду с регрессивным ходом мысли существует и *прогрессивный*, т. е. такой, при котором мысль идет от основания к следствию. Этот ход мысли называют также *выведением*, ибо используется он главным образом в тех случаях, когда необходимо получить все следствия из данного утверждения.

Между указанными двумя направлениями мысли в процессе доказательства существует глубокая связь: они взаимно дополняют друг друга — и потому полное понятие доказательства охватывает их оба. Если при регрессивном направлении мысли находят основание для некоторого утверждения, то при прогрессивном ходе мысли осуществляется проверка возможности выведения данного следствия из данного основания.

Как правило, при обосновании некоторого утверждения в теории подборка основания осуществляется из совокупности уже сформулированных утверждений, что дает возможность обнаружить строгие логические связи между различными по содержанию положениями теории, представить ее как единое целое.

При выведении следствий возможно по правилам дедуктивных умозаключений получать новые, прежде неизвестные в науке положения, которые являются истинными и не требуют практической проверки.

Доказательства, используемые в науке, как правило, имеют сложную структуру и состоят из умозаключений различных видов. Все они соединены в определенной последовательности таким образом, что следствие одного умозаключения является посылкой следующего умозаключения и т. д. В весьма сложных и разветвленных доказательствах одни и те же посылки и промежуточные заключения в качестве посылок могут применяться по нескольку раз.

Значение доказательств в науке. Трудно переоценить роль, которую доказательства играют в научном познании. Можно даже сказать, что степень зрелости и развитости науки и научного мышления непосредственно определяется уровнем использования в них доказательств, с помощью которых обосновывается истинность одних и доказывается ложность других утверждений. Доказательства позволяют нам избавляться от заблуждений и открывают простор научному творчеству. С их помощью догадки, гипотезы и другие научные предположения становятся строгим и обоснованным знанием, пополняя сокровищницу научных истин. Было бы неправильно поэтому проводить жесткое различие между процессом научного открытия и доказательством, понимая его только как процесс обоснования уже добытого знания и не дающего нового. История науки знает множество фактов, когда научное открытие рождалось «на кончике пера», т. е. получалось как следствие весьма сложных умозаключений и логического обоснования предположений. Так, великий русский ученый Д. И. Менделеев, используя открытый им периодический закон, теоретически обосновал существование ряда элементов, неизвестных прежней химии, и даже дал описание некоторых их свойств. Впоследствии эти элементы действительно были обнаружены и их свойства с большой точностью соответствовали свойствам, предсказанным и обоснованным Менделеевым.

Значительна роль доказательств и в процессе построения научной теории. Устанавливаемая с их помощью связь между различными утверждениями данной науки позволяет выявить ее логическую структуру. Возможности научной теории становятся более очевидными, если известны свойства ее логического аппарата. Не случайно поэтому, что совершенствование техники доказательств является важной научной проблемой. Большое значение ей придавали уже в древности. До наших дней дошел ряд научных теорий, созданных в античные времена, по которым можно судить о степени развития логической теории доказательств. Примерами могут служить теория силлогизмов Аристотеля и геометрия Эвклида. Они оказали мощное влияние на развитие научной мысли на протяжении многих веков. Например, метод доказательства, применявшийся в Эвклидовой геометрии вплоть до середины XIX в., считался образцом дедукции и логической строгости. Его широко использовали в математических науках и нередко пытались распространить на другие науки.

Несмотря на относительно высокие логические достоинства этого метода, он обладал в то же время рядом недостатков. Они были порождены пониманием доказательства как интеллектуальной процедуры, призванной *убедить* всех в истинности доказуемого утверждения. Задача доказательства считалась решенной, если доказуемое утверждение обосновывалось с помощью положений, обладающих наибольшей очевидностью. Критерий очевидности применялся без каких-либо существенных ограничений и распространялся также на саму процедуру доказательства, строение которого было недостаточно проанализировано логически. Критерий очевидности ставил эффективность доказательства в зависимость от субъективных способностей человека: то, что одному представлялось очевидным и не требующим в силу этого дальнейших обоснований, другому могло казаться весьма сложным и требующим специального доказательства. Ярким примером сказанного служит история постулата о параллельных прямых в геометрии Эвклида. В древности он считался очевидным и не нуждающимся в доказательстве положением, тогда как в позднейшие времена многие видные математики полагали, что имеют дело с теоремой, и предпринимали безуспешные попытки доказать ее.

Доказательство, в котором важную роль играли очевидность или интуитивная ясность, характеризовалось недостаточной логической строгостью. В нем могли использоваться утверждения, совершенно излишние для обоснования данного положения, или, наоборот, доказательство могло строиться на логически сомнительном основании, хотя интуитивная убедительность доказательства при этом не страдала. Более того, нередко случалось, что эти посылки при более глубоком анализе оказывались не совместимыми с ходом доказательства и на какой-то его стадии могли приводить к затруднениям. История математики знает немало примеров, когда несовершенство доказательных процедур приводило к ошибочным результатам. Интуитивный характер критериев таких доказательств не способствовал также выявлению и строгой формулировке правил умозаключений.

Развитие науки привело к росту значения опосредованных методов установления истины научных положений, в частности доказательств. В этих условиях стала ощущаться необходимость усовершенствовать доказательные процедуры, по возможности более ограничив критерий интуитивности. С конца XIX в. в логике формируется понятие *формального доказательства*, которое заменяет собой старое доказательство.

Формальное доказательство характеризуется сведе́нием до минимума ссылок на интуитивную очевидность при осуществлении доказательства и возрастанием логических критериев определения его эффективности и правильности. Получают строгую формулировку правила доказательств. При доказательствах используют только те утверждения, которые необходимы для его проведения, остальные устраняются. Исключается с помощью логических средств возможность присутствия невыявленных посылок. Доказательство проводится последовательно и строго в том смысле, что на каждом этапе всегда имеется возможность проверить его правильность, т. е. соответствие доказательной операции принятым правилам, без обращения к содержанию используемых посылок. Формальное доказательство широко используется в аксиоматических теориях, т. е. в таких теориях, в которых из небольшого числа начальных истинных утверждений (аксиом) выводятся все остальные истинные утверждения этой теории. Суть такого вывода на основе формального доказательства состоит в следующем: сначала применяют правила вывода к аксиомам и получают из них новые утверждения, непосредственно выводимые из аксиом. Затем те же правила применяют к новым утверждениям или совместно к новым утверждениям и аксиомам и получают новые утверждения и т. д. Если после конечного числа применений правил вывода (их называют шагами доказательства) приходят к данному утверждению, то говорят, что оно формально доказано.

Таким образом, формальные доказательства характеризуются тем, что на время их осуществления отвлекаются от конкретнего значения участвующих в доказательстве положений, т. е. от того, что в них утверждается. Это дает возможность широко применять специальные символы — искусственный язык, — которыми заменяют отдельные положения доказательства. Оно становится проще, четче проявляется логическая структура доказательства, оно легче поддается контролю.

Более развернутая характеристика формального доказательства будет дана в разделе, посвященном теории логического вывода.

В настоящее время формальные доказательства широко применяются в различных разделах современной логики и математики. Они являются необходимым методом анализа в тех случаях, когда требуется выявить структуру умозаключений там, где были использованы неформальные доказательства.

Строение доказательства. Доказательство есть такой процесс мысли, результат которого представляет собой последовательность утверждений, расположенных в определенном логическом порядке. В структуре формального и неформального доказательств выделяют следующие элементы: тезис, аргументы и форму (демонстрацию).

Тезисом доказательства называют то утверждение, которое подлежит доказательству. В формальных доказательствах, а также в некоторых науках, использующих дедуктивные процедуры, доказываемое утверждение именуют *теоремой.* Тезис является логически центральным элементом в доказательстве.

Аргументы — это положения, которые используются для доказательства данного тезиса. Поскольку аргументы суть те истинные утверждения, которые определяют истинность тезиса, их называют иногда основаниями доказательства. В формальных доказательствах они именуются *посылками.*

В качестве аргументов могут быть: утверждения, истинность которых доказана ранее, — таковыми являются теоремы, законы и другие научные положения; аксиомы; определения и утверждения, содержащие высказывания о фактах. При доказательстве данного тезиса может быть использовано произвольное, но конечное число аргументов. Они могут принадлежать к утверждениям любого типа. Так, например, доказательства в геометрии основываются на аксиомах, определениях и вспомогательных утверждениях, доказанных ранее.

Аргументы доказательства всегда находятся в определенной связи между собой, а также с тезисом. *Способ этой связи называется формой доказательства или демонстрацией.* Аргументы соединяются в умозаключения различного вида, последние соединяются в цепочку таким образом, что ее конечным звеном является тезис данного доказательства. Следовательно, форма доказательства показывает логическую последовательность перехода от оснований к тезису.

Рассмотрим пример доказательства тезиса: «Полученный в лаборатории металл не является натрием». Для его доказательства мы располагаем рядом аргументов: (1) «Все щелочные металлы разлагают воду при комнатной температуре», (2) «Натрий — щелочной металл», (3) «Полученный в лаборатории металл не разлагает воду при комнатной температуре». Все перечисленные в качестве аргументов утверждения являются истинными, причем способ установления истинности для каждого из аргументов различный. Аргумент (3) истинен на основе непосредственного доказательства путем наблюдения; аргумент (1) может являться итогом индуктивного обобщения результатов некоторого опыта, и только аргумент (2) может быть результатом некоторого силлогистического умозаключения. Процедура доказательства будет состоять в построении двух силлогистических умозаключений; одно из них даст следствие, которое будет использовано как посылка (следовательно, явится аргументом доказательства) во втором силлогистическом умозаключении:

1) Все щелочные металлы разлагают воду при комнатной температуре.
2) Натрий — щелочной металл.

---

4) Следовательно, натрий разлагает воду при комнатной температуре.

4) Натрий разлагает воду при комнатной температуре.
3) Полученный в лаборатории металл не разлагает воду при комнатной температуре.

Следовательно, полученный в лаборатории металл не является натрием.

Из примера видно, что тезис доказывается с помощью четырех аргументов. Они соединяются в два силлогизма таким образом, что следствие одного является посылкой другого. Тезис получается как следствие из этих силлогизмов по свойственным им правилам.

Виды доказательств. Существуют два основных вида доказательств: прямые доказательства и косвенные доказательства. Оба они широко представлены в науках, пользующихся дедуктивными процедурами, и особенно в математических дисциплинах.

Прямым называется такое доказательство, когда из принятых предпосылок по установленным правилам непосредственно следует тезис, требующий доказательства. Иначе говоря, в цепочке умозаключений, представляющей собой прямое доказательство, последним звеном будет являться доказываемый тезис. Например, доказательство, что 1972 год был годом високосным основано на последовательности таких рассуждений: 1) високосным называется год, в числовом выражении которого десятки с единицами делятся на 4; 2) 72 делится на 4; следовательно 1972 год является високосным годом. Нетрудно увидеть, что вывод был сделан на основании определения и одного истинного утверждения, принятых в качестве оснований нашего доказательства.

Бывает, что прямое доказательство по какой-либо причине неосуществимо. В таких случаях прибегают к *косвенным доказательствам,* именуемым иногда «доказательствами от противного» или «апагогическими», т. е. «отводящими». Главной особенностью косвенного доказательства является то, что непосредственно доказывается не тезис, а его отрицание — антитезис, причем доказательство устанавливает ложность последнего. Затем на основе закона исключенного третьего необходимо заключают об истинности тезиса. Таким образом, доказываемое утверждение на протяжении почти всего доказательства остается как бы в стороне, привлекаясь только на заключительной стадии.

Общая логическая форма косвенного доказательства выглядит следующим образом. Необходимо доказать утверждение *A* (тезис); допускаем, что имеет место (истинно) не-*A* (антитезис); из не-*A* получаем в качестве следствия некоторое утверждение *B*; устанавливается, что *B* противоречит истинности ранее доказанного утверждения, следовательно, является ложным; от ложности следствия *B* заключаем к ложности его основания, т. е. к ложности утверждения не-*A*; на основании закона исключенного третьего из ложности не-*A* делаем вывод об истинности утверждения *A*, что и являлось целью доказательства.

Легко увидеть, что переход от ложности следствия к ложности его основания был совершен в соответствии с отрицающим модусом условно-категорического силлогизма

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Если } A\text{, то } B\\ \text{Не-}B\end{array}}{\text{Следовательно, не-}A}\,.$$

Из рассмотренного следует, что *косвенное доказательство — это такой вид рассуждений, при котором доказывается ложность отрицания тезиса и на этом основании заключают об истинности тезиса.*

В качестве примера использования косвенного доказательства приведем доказательство геометрической теоремы: «Два перпендикуляра к одной и той же прямой не могут пересечься, сколько бы их ни продолжали». Для начала доказательства сформулируем утверждение, противоречащее теореме: «Два перпендикуляра к одной и той же прямой при продолжении пересекаются». Следствием из этого допущения будет являться утверждение, что из точки, лежащей вне прямой, можно опустить на эту прямую два перпендикуляра. Но это следствие ложно, так как ранее была доказана теорема, что «из точки, лежащей вне прямой, можно опустить на эту прямую только один перпендикуляр». Из ложности следствия, утверждающего о возможности опустить на эту прямую из точки, находящейся вне прямой, два перпендикуляра, мы делаем вывод о ложности его основания, т. е. принятого нами допущения о пересечении двух перпендикуляров к одной и той же прямой. Итак, мы имеем два противоречащих утверждения: теорему и принятое нами допущение, из которых одно, а именно допущение, является ложным утверждением. На основании закона исключенного третьего мы заключаем об истинности теоремы в ее вышеприведенной формулировке.

В данном примере следствие, вытекающее из антитезиса, пришло в противоречие с ранее доказанным утверждением. Но бывают и другие виды приведения к противоречию при косвенном доказательстве. Например, когда противоречие возникает между двумя следствиями антитезиса или когда из антитезиса выводится следствие, отрицающее антитезис, и др. Такого рода случаи получили наименование «приведение к абсурду»; иногда вообще косвенные доказательства именуют «доказательствами посредством приведения к абсурду (нелепости)» (*reductio ad absurdum*).

Опровержение. Помимо доказательства утверждений путем установления их истинности важное место в научной практике имеют и *опровержения* утверждений.

Опровергнуть какое-либо утверждение означает не что иное, как обосновать его ложность. Таким образом, во многих случаях опровержение имеет такую же логическую структуру, как и доказательства, о чем свидетельствуют косвенные доказательства, в которых для обоснования истинного тезиса опровергается антитезис. Однако в косвенных доказательствах опровержение играет подчиненную роль, выступает как момент, в то время как во многих других случаях оно имеет самостоятельное значение. Как и доказательства, опровержение имеет тезис, аргументы и форму (демонстрацию). *Тезис опровержения* — это положение, которое требуется опровергнуть. *Аргументы* — это утверждения, с помощью которых опровергается тезис (доказывается его ложность). *Форма опровержения* — это способ логической связи аргументов и тезиса опровержения.

Опровержение тезиса может быть осуществлено двояко. Во-первых тем, что докажут истинность антитезиса; во-вторых, тем, что установят ложность следствий, вытекающих из тезиса.

Опровержение первого рода состоит в следующей последовательности рассуждений. Сначала находят некоторое утверждение, противоречащее тезису, — антитезис, затем доказывают его истинность. Если это удается, на основании закона противоречия при сопоставлении тезиса и антитезиса делаем вывод о ложности первого. Например, утверждение «Все млекопитающие живут на суше» (общеутвердительное) опровергается доказательством истинности частноотрицательного утверждения «Некоторые млекопитающие не живут на суше»:

Кит — не живет на суше.
Кит — млекопитающее.

Следовательно, некоторые млекопитающие не живут на суше.

Опровержение второго рода протекает следующим образом. Допуская истинность тезиса, выводят из него ряд следствий. Если хотя бы одно из полученных следствий находится в противоречии с действительным положением вещей или с уже доказанными утверждениями, то с необходимостью делают вывод о ложности тезиса. В данном случае заключают от ложности следствия к ложности основания.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что опровергать некоторое утверждение можно посредством опровержения как тех оснований, на которых покоится его истина, так и формы его доказательства — демонстрации. Это виды так называемых косвенных опровержений. Однако по своему значению они менее эффективны, чем прямое опровержение тезиса. Действительно, доказать ложность оснований не означает, что этим доказана ложность следствия из них. Например, в умозаключении:

Все планеты имеют спутников.
Марс — планета.

Следовательно, Марс имеет спутников.

Тезис является истинным утверждением, тем не менее доказательство неверно, ибо большая посылка данного силлогизма — утверждение ложное. Его можно опровергнуть замечанием, что Венера не имеет спутников.

Опровержение демонстрации доказательства тезиса заключается в том, что показывают отсутствие логической связи между тезисом и его аргументом. Поскольку это может быть прежде всего результатом нарушения правил умозаключений, по которым строится доказательство данного тезиса, то для опровержения необходимо указать на вид ошибки. Тем самым доказывается, что доказательство было построено неправильно. Тем не менее это не означает, что мы опровергли сам тезис, который может быть как истинным, так и ложным. Имеется немало примеров того, когда истинное утверждение считалось строго доказанным, хотя со временем в доказательстве находили ошибки.

Опровержения являются важным орудием развития научного познания. С их помощью наука освобождается от ложных утверждений, заблуждений и необоснованных догм, а также совершенствует свой теоретический аппарат.

Условия и правила, обеспечивающие эффективность доказательства. Основные ошибки. Для того чтобы доказательства и опровержения приводили к желаемому результату, необходимо соблюдение правил и условий их проведения. Поскольку доказательства, как правило, состоят из целого ряда умозаключений различного вида, постольку в доказательствах необходимо соблюдать правила и условия для каждого вида умозаключений в отдельности. Однако из факта соединения многих умозаключений в сложных доказательствах и опровержениях и, следовательно, наличия многих посылок вытекают дополнительные условия, несоблюдение которых влечет за собой ошибки в доказательствах.

Эти условия и ошибки, вытекающие из их несоблюдения, делятся на несколько групп в зависимости от того, к какой части доказательства они относятся. Вот некоторые из них:

1. Правила и условия, относящиеся к тезису.

Тезис должен быть точно и ясно сформулирован. Выражение, не удовлетворяющее этому требованию, участвовать в доказательстве не может. Неточно сформулированные тезисы, расплывчатые, неопределенные понятия, неуточненный смысл утверждения — все это приводит к путанице и делает невозможным доказательство. Не случайно поэтому в научной практике, прежде чем приступить к доказательству какого-либо научного положения, проводят исследования по уточнению их смысла и внутренней логической связанности, по анализу понятий, входящих в состав этого положения, и т. д.

Тезис на всем протяжении доказательства или опровержения должен оставаться одним и тем же. Это условие основано на соблюдении закона тождества, игнорирование его приводит к тому, что тезис остается недоказанным, поскольку при доказательстве происходит подмена тезиса (*ignoratio elenchi*) и доказывается или опровергается не тот тезис, который необходимо.

Часто такая подмена тезиса осуществляется на почве непонимания смысла тезиса, его нечеткой формулировки или как результат неверных преобразований тезиса с целью придать ему удобную для доказательства форму. Последнее имеет место при формализованных доказательствах. Например, вместо тезиса: «Угол *A* равен углу *B*» пытаются доказать тезис: «Неверно, что угол *A* больше угла *B*», который неравнозначен тезису, данному к доказательству.

Ошибку, порожденную несоблюдением этого условия, выражает следующий принцип «Кто слишком много доказывает, тот ничего не доказывает». Например, стремясь доказать тезис «Язык не тождествен мышлению», начинают доказывать как равнозначное следующее утверждение: «Язык не связан с мышлением». Последнее утверждение более категорично и к тому же ложное, в то время как действительный тезис — истинное утверждение. Такое доказательство не будет эффективным.

2. Правила и условия, относящиеся к аргументам.

Аргументы во всяком доказательстве должны быть истинными утверждениями. Очевидно, что истинность тезиса с помощью ложных аргументов обосновать невозможно. Несмотря на свою очевидность, это правило не всегда удается соблюсти, ввиду того что ложность аргумента может быть скрытой и трудно устанавливаемой. Несоблюдение данного правила приводит к ошибкам, имеющим названия: «основное заблуждение» — когда в качестве истинного аргумента фигурирует ложное утверждение; «кто много доказывает, тот ничего не доказывает» — когда из аргумента следует больше, чем требуется для доказательства, в том числе и ложное утверждение.

Истинность аргумента должна быть доказанной независимо от тезиса. Нарушение этого правила влечет за собой ошибку «круг в доказательстве». Она появляется в тех случаях, когда тезис обосновывается с помощью утверждений, равнозначных ему или доказанных с его помощью.

Аргументы должны быть достаточным основанием для доказательства тезиса. Нарушение этого правила приводит к тому, что при доказательстве пытаются установить логическую связь между различными по содержанию утверждениями. Утверждение «На улице идет дождь» недостаточно само по себе для обоснования тезиса «У *А* дурное настроение», хотя реальная связь между этими фактами может иметь место. Разновидностями этой ошибки являются всевозможные апелляции при доказательствах «к публике», «к личности» и т. д.

3. Правила и условия, относящиеся к демонстрации.

К ним относятся все правила и ошибки, связанные с их нарушением, тех умозаключений, которые использованы при построении доказательств. Например, правила категорического силлогизма, правила условно-разделительного, условного и других силлогизмов.

§ 38. Доказательство (продолжение: паралогизмы, софизмы и парадоксы)

Логические ошибки, допускаемые в доказательстве, в рассуждениях вообще непреднамеренно, называются *паралогизмами* (греч. *paralogismos* — неправильное рассуждение), а умышленно неверные рассуждения — *софизмами* (греч. *sophisma* — хитрость, измышление).

Цель применения софизма — выдать ложь за истину путем придания логически несостоятельному рассуждению видимости логической правильности. Прием софистики заключается в том, что отождествляются заведомо различные, часто принципиально непохожие друг на друга предметы, понятия, события.

Использование софизмов бывает часто обусловлено интересами реакционных классов, которые находятся в противоречии с подлинно научным объяснением общественных явлений. Например, строго научное доказательство неизбежности гибели эксплуататорского общества несовместимо с целью реакционных классов увековечить общественный строй, основанный на эксплуатации человека человеком. Поэтому современные буржуазные идеологи создают ложные теории, используя приемы софистики. Примерами таких теорий являются теории демократического социализма, народного капитализма и т. д.

Парадоксы (греч. *para* — против, *doxa* — мнение) — рассуждение, в котором в равной мере доказывается истинность какого-либо утверждения и его отрицания.

Причиной парадокса является то, что в теориях, содержащих парадоксы, недостаточно уяснены фундаментальные понятия, в том числе логические. Рассмотрим некоторые примеры парадоксов.

Прежде всего обратимся к парадоксу лжеца, первое упоминание о котором, как полагают многие исследователи, принадлежит современнику Сократа Евбулиду из Милета. Существует несколько вариантов этого парадокса. Наиболее простой из них связан с человеком, сказавшим «Я лгу». Суть его состоит в том, что вопреки известному логическому закону, согласно которому утверждение чего-либо и отрицание того же самого соотносятся друг с другом так, что в одном из них выражается истина, а в другом — ложь, делается попытка обосновать возможность одновременно и утверждения, и отрицания. Такой парадоксальный вывод получается при ответе на вопрос: «Лжет ли тот, кто говорит, что он лжет?». В этом случае мы якобы неизбежно приходим к выводу: «Если он лжет, то он говорит правду и наоборот».

В более современной модификации этот парадокс выглядит так. Предположим, что на листе бумаги написано одно-единственное предложение *P*: «Все написанное на данном листе бумаги является ложным». Затем строят рассуждения, согласно которым нельзя установить ни истинность, ни ложность упомянутого предложения *P*. Этот результат получается следующим путем.

Допустим сначала, что предложение *P* является истинным, делается вывод, что в этом случае его надо считать ложным, так как в нем утверждается, что все написанное на листе бумаги является ложным, а кроме него самого ничего на бумаге не написано. Если же исходить из того, что предложение *P* ложно, то мы якобы должны считать его истинным, потому что, утверждая ложность этого предложения, мы тем самым осуществляем отрицание его, которое можно выразить в предложении: «Ложно, что все написанное на данном листе, ложно».

В эквивалентной положительной форме последнее утверждение гласит: «Некоторое из написанного на данном листе не является ложным». А так как на данном листе бумаги написано единственное предложение *P*, то мы должны считать его не ложным, а истинным. Таково противоречие, к которому приходят в этом рассуждении, характерной особенностью которого является то, что с самого начала неявно исходят из предпосылки, что содержание предложения *P* высказывается о нем самом. Если эту предпосылку отбросить, то парадокс исчезает.

Высказывание в логическом смысле слова всегда является утверждением (отрицанием) относительно предметов, которые отличны от самого данного высказывания. Предикат суждения *А* непосредственно высказывается не о самом этом суждении, а о тех предметах, которые мыслятся в объеме понятия, выполняющего функцию субъекта в данном суждении, т. е. о предметах, существующих вне этого суждения, независимо от него.

То, что предикат определенного суждения высказывается не о самом этом суждении, отмечалось многими логиками, в том числе русским логиком Каринским. Так, характеризуя основные части суждения — субъект и предикат, — он писал: «Первая из этих частей — субъект — указывает на предмет, который познается в суждении, вторая — предикат — заключает указание на то, что познание наше считает истинным о субъекте».[43] То, о чем высказывается предикат суждения, является внешним предметом по отношению к соответствующему суждению.

Некоторые авторы приходят к ошибочному заключению о наличии суждений, предикаты которых высказываются непосредственно о них же, т. е. о тех же самых суждениях в результате смешения объективно различных понятий — понятия «предмет, относительно которого высказывается данный предикат непосредственно» с понятием «предмет, относительно которого высказывается данный предикат косвенно». Но, допуская данный паралогизм, мы тем самым ошибочно полагаем, что если познано общее в конкретных предметах, то тем самым якобы познан каждый и отдельный конкретный предмет, в то время как на самом деле при наличии знаний об общем мы можем и не подозревать о существовании того или иного конкретного предмета, стороной которого является общее.

Это хорошо понимал и разъяснял уже создатель науки логики. «Знать же можно то, — писал он, — о чем уже есть некоторое знание, и то, что познается одновременно с восприятием ⟨его⟩, как, например, то, что бывает подчиненным общему, о котором имеется знание. В самом деле, что всякий треугольник имеет углы, которые ⟨в сумме⟩ равны двум прямым, было известно уже раньше, но то, что эта, построенная на полуокружности ⟨фигура⟩ есть треугольник, это познано вместе с проведением ⟨линий⟩, и ⟨притом⟩ последний ⟨термин⟩ не познается через средний ⟨термин⟩, именно то, что является отдельной вещью и не приписывается какому-либо подлежащему».[44]

Поэтому неверно встречающееся мнение, будто утверждение «Всякое суждение является либо истинным, либо ложным» может служить примером, подтверждающим наличие случаев, когда предикат суждения *A* высказывается в самом этом суждении, откуда якобы следует, что в этом случае предметом суждения *A* является оно само.

В действительности для того чтобы утверждение «Всякое суждение является либо истинным, либо ложным» (*A*) стало

---

[43] Каринский М. И. Отрывок из литографированного издания «Логика», 1884—1885 г. — В кн.: Избр. труды русских логиков XIX в. М., 1956, с. 183.

[44] Аристотель. Аналитики. М., 1952, с. 180.

предметом суждения, мы должны высказать суждение «Утверждение, что „Всякое суждение является либо истинным, либо ложным“ является либо истинным, либо ложным» (B), которое нетождественно с суждением (A), потому что последнее является общим суждением, а суждение (B) единичным.

Когда говорят, что предметом суждения (A) является оно само, то аргументируют это мнение тем, что раз предикат этого суждения высказывается о всех суждениях, то естественно отнести его к самому этому суждению. Но такая аргументация несостоятельна. Действительно, указанный предикат естественно отнести к самому этому суждению. Но сделать этого можно только в результате умозаключения, для которого требуется дополнительная посылка «Высказывание „Всякое суждение является либо истинным, либо ложным“ представляет собой суждение», а предметом суждения следует считать только то, что соотносится с предикатом непосредственно.

Для того чтобы суждение (A) стало непосредственно предметом, к которому относится предикат суждения (B), оно должно выступать в суждении (B) не как предложение, выражающее суждение, а как наименование последнего, выражающее регистрирующее понятие, которое выполняет функцию субъекта в суждении (B).

Точно так же и к суждению «Все написанное на данном листе бумаги является ложным» может относиться предикат «ложно» только тогда, когда соответствующее ему регистрирующее понятие «Суждение „все написанное на данном листе бумаги является ложным“ будет субъектом суждения, в котором предикатом является понятие „ложно“». Разумеется, что и предикат «истинно» может быть отнесен к любому суждению только в том случае, если он соединен в суждении с субъектом, представляющим собой понятие, обозначающее суждение, относительно которого высказывается предикат «истинно». А если имеются два суждения, в которых субъектом является одно и то же понятие и предикатом в одном из них является понятие «ложно», а в другом — понятие «истинно», то такие два суждения будут явно несовместимыми, т. е. ничего парадоксального в этом случае не оказывается.

Парадокс «лгун», следовательно, возникает тогда, когда понятие, являющееся субъектом в суждении, смешивается с самим этим суждением: в мысли в данном случае смешиваются соответственно словосочетание «Суждение „Все написанное на данном листе бумаги является ложным“» с предложением «Все написанное на данном листе бумаги является ложным».

Причиной противоречивых выводов в известном парадоксе Греллинга также является смешение понятий, нарушение закона тождества.

Содержание этого парадокса следующее. Все русские прилагательные, обозначающие свойства, которыми они сами обладают («многосложный», «русский» и т. п.), назовем *автологичными*, а остальные прилагательные («красный», «храбрый» и т. п. — *гетерологичными*. Тогда, если прилагательное «гетерологичный» гетерологично, то оно автологично, и наоборот.

Но данный парадокс исчезает, если в анализе его мы будем строго различать выражения: (1) «обладать свойством» в смысле «обозначать некоторое свойство» и (2) «обладать свойством» в смысле, отличном от первого, и соответственно различать свойства категории (1) и категории (2).

Свойства в первом смысле имеют все прилагательные, так как обладание такими свойствами равнозначно наличию смыслового, понятийного содержания слова. Причем если прилагательное является автологичным, то оно является общим наименованием для одного из своих собственных свойств второй категории. Это значит, что в таком случае свойство (1) проявляется в отношении к свойству (2).

Что же касается прилагательного «гетерологичное», то в нем нет проявления свойства (1) в отношении к собственному свойству (2). В прилагательном «гетерологичное» свойство (1) выражается словами «обозначать свойство, отсутствующее в самом обозначающем». Если бы в прилагательном «гетерологичное» имелось также свойство (2), то оно должно было бы выступать по отношению к свойству (1) как обозначаемое к функции обозначения. Но такого свойства (2) в прилагательном «гетерологичное» указать нельзя, так как функция в слове, выражающая его понятийное содержание, бывает одна.

Следовательно, прилагательное «гетерологичное» гетерологично, и считать его одновременно автологичным нет объективных оснований.

В разобранном парадоксе «лгун» употреблялись логические и гносеологические понятия. Кроме таких парадоксов, имеются также в большом количестве и парадоксы, содержащие, помимо логических понятий, математические понятия. Наиболее широко известным парадоксом этого типа является парадокс Рассела.

В основу этого парадокса положено утверждение о том, что все классы объектов, которые рассматриваются нами в той или иной предметной области, могут быть разделены на два вида — на: 1) собственные классы, т. е. такие классы, как класс людей, домов, которые не являются членами самих себя; 2) несобственные классы, т. е. классы являющиеся членами самих себя, в качестве примеров которых называют часто «класс всех понятий», «класс всех классов» и т. д.

Затем парадокс излагается следующим образом. Так как все классы первого вида, т. е. собственные классы, образуют особый класс R, то возникает вопрос, относится ли он к первому виду классов или ко второму. После этого предлагаются попытки ответить на этот вопрос, приводящие к противоречию и выражающиеся в виде следующих рассуждений. Если R — собственный класс, то, так как R есть класс всех таких классов, R является членом R и, следовательно, R не является собственным классом. Но если R — не собственный класс, то R — не член R и поэтому R — собственный класс. Таким образом, предположив, что R — собственный класс, мы приходим к заключению, что он — не собственный класс, а предположив, что R — не собственный класс, мы приходим к выводу, что он собственный класс.

В целях объяснения данного парадокса рассмотрим с точки зрения теории понятия основное утверждение, без которого парадокс был бы невозможен, а именно утверждение о наличии классов, которые являются членами самих себя.

В связи с этим важно указать на то, что понятия «класс» и «член класса», так же как понятия «часть» и «целое» или «род» и «вид», как логические категории являются относительными понятиями. Как известно, это значит, что одно и то же понятие может быть видом по отношению к другому (большему по объему) и родом — по отношению к третьему (меньшему по объему). Равным образом величина N может быть целым по отношению к величине B, если $N > B$, и частью по отношению к величине C, если $C > N$.

При этом остальная часть предметов, имеющих общее свойство, может быть названа членом или элементом какого-либо класса предметов N, а N, в свою очередь, может быть членом более широкого класса предметов M.

Поэтому целое равно своим частям, вместе взятым, т. е. целое содержит в себе себя только как совокупность всех своих частей, а не наряду с ними. Класс может содержать в себе самого себя как совокупность всех своих членов, а не наряду с ними.

Если же мы будем считать, что какой-либо класс R содержит самого себя в качестве своего элемента, молчаливо подразумевая, что он содержит себя в качестве элемента (члена) наряду с другими элементами, то мы просто допустим смешение понятий, смешение разных объектов.

Это смешение, собственно, и происходит при том изложении парадокса Рассела, которое приводилось выше. Согласно этому изложению получается, что один класс равен самому себе, умноженному на два. В самом деле, если говорится о классе всех понятий, что он содержит в себе самого себя наряду с другими элементами в качестве члена, то это равносильно утверждению, что каждый элемент класса содержится в классе дважды. Например, если в классе M содержатся члены a, b, c, d и т. д., то, сказав, что класс M содержит самого себя в качестве элемента, мы должны мыслить этот «элемент» равным сумме элементов a, b, c, d и т. д.

Чтобы наглядно представить логическую несообразность утверждения о том, что могут существовать классы, содержащие самих себя в качестве своих элементов, рассмотрим это на примере класса всех понятий, который обычно приводится в качестве иллюстрации класса, содержащего в качестве элемента самого себя.

В связи с этим заметим, что выражение «класс всех понятий» по своему содержанию ничем не отличается от выражения «класс понятий», а последнее выражение отличается от слова «понятие» в логическом плане так же, как выражение «класс людей» отличается от выражения «человек». Эти различия между двумя последними выражениями обнаруживаются для нас со всей очевидностью тогда, когда каждое из этих выражений подставляется в пропозициональную функцию «X — живет менее двух тысяч лет» вместо переменной X.

В этом случае образуются соответственно два суждения: (1) «Человек живет менее 2000 лет»; (2) «Класс людей живет менее 2000 лет». Каждому ясно, что первое из данных суждений являеется истинным, а второе — ложным.

Различие между выражениями «понятие» и «класс понятий» легко обнаружить подобным же образом, т. е. путем подстановки каждого из них вместо x, например в пропорциональную функцию «x — то, что в логике рассматривается в качестве составной части простого суждения». В результате такой подстановки получаются следующие два суждения: (1) «Понятие есть то, что в логике рассматривается в качестве составной части простого суждения» и (2) «Класс понятий есть то, что в логике рассматривается в качестве составной части простого суждения». Из этих суждений первое является истинным, а второе — ложным.

§ 39. Аксиоматический метод

Развитие дедуктивных методов построения научных теорий тесно связано с *аксиоматическим методом*. Эта связь настолько тесная, что часто термины «дедуктивный метод» и «аксиоматический метод» рассматривают как синонимичные, что не совсем точно. Сближение этих терминов имеет исторические основания, когда образцом дедуктивно построенной считалась аксиоматизированная геометрия Эвклида, а остальные науки стремились с бóльшим или меньшим успехом походить на нее. В настоящее время широкое распространение в логике получила теория натурального вывода, являющаяся особой формой дедуктивных доказательств, в которой формализуются некоторые стороны обычных рассуждений. Однако значение аксиоматического метода не уменьшилось, и он с известным успехом получает распространение в теоретических разделах ряда естественных наук, например в биологии, квантовой механике и др.

Для понимания сущности аксиоматического метода следует обратить внимание на то обстоятельство, что в достаточно развитой научной теории всегда можно найти группу понятий, которые используются для определения других понятий этой теории. Это так называемые *фундаментальные* понятия данной теории, значение которых полагается известным и в данной теории не требующим определений. Например, в механике Ньютона таким понятием будет понятие силы, в геометрии Эвклида — понятия точки, прямой, плоскости. В дедуктивных теориях они называются *первичными* понятиями теории.

Сходную зависимость можно обнаружить и между утверждениями, в которых заключено научное содержание теории. Среди них можно найти такие высказывания, истинность которых служит обоснованием истинности ряда других высказываний, что также дает право рассматривать их как *фундаментальные* или *первичные* утверждения данной теории, разумеется, только относительно ряда производных от них утверждений. Их примером могут служить научные законы, из которых как следствия получают более частные положения. Учитывая эту особенность законов, в физике используют так называемый метод принципов для построения физической теории, т. е. по правилам дедукции извлекают из принципов утверждения о свойствах реальных физических объектов.

При аксиоматическом методе естественно складывающаяся зависимость одних понятий и утверждений от других получает свое развитие и становится принципом построения теории.

В общем случае построение осуществляется следующим образом: прежде всего выбирают некоторое число исходных понятий без объяснения их смысла, полагая его известным. В дальнейшем эти понятия используются для определения всех других понятий, которые необходимо будет ввести в теорию по мере ее развития. Эти последние называются *определяемыми* понятиями данной теории. Вводя новые понятия, строго следуют правилу, что ни одно понятие не может быть употреблено в теории без предварительного его определения с помощью первичных понятий или тех, которые раньше уже были определены в теории. Итак, никаких других понятий, кроме первичных и определяемых, аксиоматическая теория не содержит.

Подобным же образом поступают и в отношении выражений теории, которую хотят аксиоматизировать. Некоторое их число выбирается в качестве первичных или *аксиом.* Истинность аксиом полагается известной и в пределах данной теории никак не устанавливается. Никакое другое утверждение не может быть введено в теорию, если его истинность не установлена на основе имеющихся аксиом и прежде доказанных утверждений. В отличие от аксиом, доказываемые утверждения теории называют *теоремами.* Итак, никаких других утверждений, кроме аксиом и теорем, аксиоматизированная теория не содержит.

Аксиомы и первичные понятия образуют *базис* теории. Следует обратить внимание на то, что, хотя первичные понятия могут быть введены особым списком, они, как правило, появляются внутри аксиом, т. е. те понятия, из которых состоят аксиомы, как правило, являются первичными. Отмечая это обстоятельство, иногда говорят, что система аксиом является неявным определением первичных понятий теории.

Выбирая список первичных понятий, следует иметь в виду, что их должно быть достаточно для определения всех необходимых для развития теории понятий.

При выборе аксиом стремятся, чтобы их список не был слишком обширным, а сами они были структурно простыми выражениями. Иногда в списке аксиом данной теории может находиться всего лишь одна аксиома.

Очевидно, что одних только аксиом, первичных понятий и определений недостаточно для того, чтобы начать получать в теории новые утверждения или доказывать уже известные теоремы. Для этого необходимо знать принципы, позволяющие совершать указанные операции. Поэтому очередным шагом после выбора аксиом и первичных терминов является введение правил доказательства. Обычно число их невелико, а содержание несложно. Оно состоит в указании операций, с помощью которых можно доказать любое истинное в данной теории утверждение, а также в их описании. Только после того, как введены правила, аксиоматизация теории заканчивается, и можно приступать к доказательству теорем и выведению новых утверждений.

Аксиоматизация научных теорий имеет большую познавательную ценность. Она позволяет эффективно и на строго логической основе решать проблему истинности положений теории как проблему их доказуемости. Действительно, при соблюдении всех правил доказательства имеется полная гарантия, что из истинных аксиом мы получим в качестве следствий новые истинные положения теории.

Наконец, вопрос о том, принадлежит ли некоторое содержательное истинное положение к данной теории, с точки зрения аксиоматизации решается как вопрос доказуемости его логическими средствами данной теории: в случае доказуемости оно необходимо принадлежит этой теории.

При аксиоматизации теории, как правило, сохраняется большая свобода выбора как числа аксиом, так и конкретных положений. Это же касается и первичных понятий. Одна и та же теория может иметь различную аксиоматику. Однако эта свобода не имеет ничего общего с субъективным произволом и конвенционализмом, так как в своей основе она есть выражение творческого характера познания и способствует наиболее эффективному решению творческих задач.

Недоказуемость аксиом в пределах данной теории также не свидетельствует в пользу произвольного характера их истинности. Аксиоматизация научной теории, как правило, становится возможной лишь тогда, когда в ней уже установлены и проверены практикой многие положения, и некоторые из них становятся аксиомами. Следует обратить внимание на тот факт, что аксиомы фиксируют наиболее общие и, следовательно, важные отношения между понятиями теории и поэтому в содержательном аспекте им могут соответствовать наиболее важные, фундаментальные положения.

Не следует забывать, что аксиоматизированная теория не существует особняком, вне системы научного знания, она соотносится с другими теориями или входит в состав более широких, в которых ее аксиомы могут быть доказаны, как теоремы, а исходные понятия — определяемыми. Наконец, истинность аксиом, правильность аксиоматизации вообще обосновываются практической приложимостью всей системы в целом и ее содержательной интерпретацией.

Аксиоматический метод построения научных теорий особенно плодотворно проявил себя в логике и математике. С изменением характера этих дисциплин, особенно логики, менялся и сам аксиоматический метод. Особое значение имело развитие формальных методов в этих науках, которое изменило представление об аксиоматизации и ее возможностях.

В истории аксиоматического метода можно выделить два этапа: этап «содержательной» аксиоматики и этап формализованной аксиоматики.

«Содержательная» аксиоматизация характеризуется тем, что ведущим является ориентация на конкретное содержание аксиоматизируемой теории. Она проявляется в том, что формально-логическая сторона метода оставалась незамеченной в контексте содержательных установок, главные из которых: требование интуитивных критериев истинности для аксиом, ясности для первичных понятий и убедительности для доказательства. Поэтому доказательство даже в пределах одной теории имело характер каждый раз заново воссоздаваемого процесса, зависевшего в значительной степени от содержания теорем, подлежащих доказательству. В нем имелись невыявленные посылки и пропущенные звенья. Тем не менее такое логически несовершенное доказательство было вполне удовлетворительным, если обладало убедительностью. Зависимость от субъективно-психологических предпосылок существенно снижала ценность аксиоматического метода и порождала ряд трудных проблем, например проблему парадоксов. Примером содержательно аксиоматизированной теории является упоминавшаяся ранее геометрия Эвклида. Она характеризуется невыявленностью логического аппарата теории в виде сформулирования тех общих правил, которые определяют ход умозаключений, стремлением дать интуитивное определение

первичным понятиям, господством наглядности как выражением стремления сделать доказательство убедительным.

Теоретическое несовершенство метода «содержательной» аксиоматики, ставшее очевидным к концу XIX в., привело к попыткам переосмыслить его сущность на базе новых достижений математической логики. Аксиоматический метод тесно связывается с идеей *формализованных* языков и пониманием доказательства как *формальной* процедуры.

Формализованные языки суть такие системы символов, которые характеризуются строго однозначным описанием словаря (т. е. элементов этого языка) и наличием особых структурных правил, называемых *синтаксисом*, относительно составления осмысленных выражений из элементов этого языка. Особенностью синтаксических правил является то, что благодаря им только по внешнему виду выражения можно определить, является ли оно осмысленным в данном языке или нет. В том случае, если его построение произведено в соответствии с правилами синтаксиса, но является осмысленным. Таким образом, обращаться к содержательным критериям осмысленности нет необходимости.

Аксиоматизация на почве формализованного языка состоит теперь в том, что в качестве аксиом выбирают некоторые правильные выражения, их принимают в качестве истинных, а затем по точно сформулированным правилам формального доказательства, путем преобразования одних правильных выражений в другие получают следствия из аксиом.

Для формализованных аксиоматических систем лишен смысла вопрос об их конкретном содержании. Является ли эта теория формализованной арифметикой, или геометрией, или какой-то иной дисциплиной решается посредством *интерпретации*. В общем смысле интерпретация — это приведение правильных выражений формализованной аксиоматической системы во взаимно-однозначное соответствие истинным выражениям какой-нибудь содержательной теории. Если такое соответствие между элементами аксиоматизированной системы и элементами содержательной теории найдено, формализованная теория получает подтверждение, а ее выражения приобретают содержательный характер.

Система аксиом, определения и правила вывода аксиоматизированной системы должны удовлетворять ряду методологических условий. Для правил вывода они сводятся к требованию строгой и однозначной формулировки, а также к требованию достаточности. Для определений важны два требования: устранимости и непротиворечивости.

Смысл требования устранимости определений сводится к тому, что всякое выражение теории, содержащее определяемое понятие, может быть заменено эквивалентным ему выражением, в котором это понятие отсутствует, но зато содержатся только первичные понятия теории, Если введение определений и определяемых понятий не приводит к возникновению противоречий в теории, т. е. к ситуации, когда в ней становятся выводами как утверждение *А*, так и утверждение *не-А*, то они отвечают требованию непротиворечивости. Аксиоматическая система должна быть непротиворечивой, полной и независимой.

Система аксиом какой-нибудь теории является *непротиворечивой*, если из нее в соответствии с принятыми правилами нельзя вывести двух утверждений, одно из которых было бы отрицанием другого. Это — важнейший постулат, в зависимости от которого решается вопрос о ценности аксиоматизированной системы. Очевидно, что система аксиом, приводящая к противоречиям, не обладает ценностью.

Полнота системы аксиом означает, что при данных правилах принятых аксиом достаточно, чтобы на их основе доказать или опровергнуть любое выражение, которое можно сформулировать на языке теории, к которой принадлежит эта система аксиом. Это тоже важное требование, однако, несмотря на его кажущуюся естественность, существуют теоретически важные неполные системы, например арифметика натуральных чисел.

Независимость аксиом — наименее важное из перечисленных требований; она заключается в том, что аксиомы должны подбираться так, чтобы ни одна из них не была следствием из какого-либо числа остальных аксиом. В противном случае, такая аксиома является просто теоремой и подлежит устранению из аксиоматического списка. Реализация принципа независимости существенно упрощает процесс доказательства и делает его более строгим.

§ 40. Индуктивные методы установления причинной связи явлений

Некоторые особенности причинной связи явлений. Все предметы и явления окружающего мира находятся во взаимной связи между собой, так или иначе зависят друг от друга и обусловливают друг друга.

Причинная связь является одним из видов универсальной взаимосвязи. Ни в природе, ни в обществе нет беспричинных явлений, в мире все причинно обусловлено. Такая причинная связь существует в мире объективно, независимо от сознания и воли людей. Например, нагревание металла служит причиной такого явления, как его расширение.

Причиной называется такое явление (или совокупность явлений), которое необходимо вызывает другое, а это последующее явление называется следствием или действием.

Одним из свойств причинно-следственной связи является то, что они находятся между собой в строгой временной зависимости. По времени причина всегда предшествует следствию, а следствие по времени всегда наступает (следует) после своей причины. Не может быть так, чтобы следствие появилось раньше своей причины.

Однако такая временна́я последовательность двух явлений не должна смешиваться (отождествляться) с причинно-следственной связью. Дело в том, что всякая причинно-следственная связь характеризуется такой временно́й последовательностью, но далеко не все, что выражает временну́ю последовательность, одновременно выражает и причинно-следственную связь. Это означает, что следование во времени не является достаточным признаком для характеристики причинной связи. Поэтому, наблюдая последовательную смену во времени двух явлений, мы не можем на этом основании считать предшествующее по времени явление причиной, а следующее за ним явление — следствием. Так, смена времен года совершается последовательно во времени одно за другим. Тем не менее мы не можем на этом основании считать, например, что лето есть причина осени, поскольку осень всегда наступает после лета.

В связи с таким отождествлением простой последовательности двух явлений во времени с причинно-следственной связью в науке логике выделяется распространенная логическая ошибка, называемая по латыни *post hoc ergo propter hoc* (после этого — значит по причине этого). Данная логическая ошибка в том и состоит, что наблюдаемое явление хотя и может произойти после этого, но это еще не означает, что оно произошло по причине этого.

Все дело в том, как указывал еще Ф. Энгельс, что из подобного рода эмпирических обобщений никогда с необходимостью не следует вывод о причинной связи явлений, когда мы знаем тольку одну их временну́ю последовательность. «Эмпирическое наблюдение, — писал Ф. Энгельс, — само по себе никогда не может доказать достаточным образом необходимость. Post hoc, но не propter hoc». [45]

Причинная связь явлений может быть доказана в практической деятельности людей. Так, если в практической деятельности люди могут вызывать определенную последовательность явлений во времени, то это может служить достаточным доказательством их необходимой причинной связи. [46]

Однако в тех случаях, когда нельзя непосредственно на практике проверить действительную причинную связь явлений, люди в своих рассуждениях иногда допускают указанную выше логическую ошибку, смешивая временну́ю последовательность явлений с реальной причинно-следственной связью.

---

[45] Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 544.

[46] Об этом см., например: Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 544.

В. И. Ленин при обсуждении Устава партии на III съезде РСДРП, анализируя характер построения аргументов т. Иванова, защищавшего идею единоцентрия, писал: «Во всем построении т. Иванова я вижу ошибку, предусмотренную логикой: *post hoc, ergo propter hoc*».[47]

Часто логическая ошибка «после этого — значит по причине этого» лежит в основе возникновения различных предрассудков и суеверий. Так, например, перед началом нашествия Наполеона в Россию в 1811 г. в районе Северного полушария пролетела грандиозная комета, ее поперечник составлял более одного миллиона километров. Над большей частью России небо было красное. А затем произошло такое бедствие, как нашествие Наполеона на Россию. Последовательная связь этих двух явлений во времени породила такое суеверное предубеждение, что причиной тяжелой войны в России явилось красное (кровавое) небо. В народе долго бытовало такое предубеждение, что когда небо будет красное, то наступит война. Это типичный исторический пример смешения простой временнóй последовательности с причинно-следственной связью.

Нужно подчеркнуть, что установление причинной связи часто требует рассмотрения целого ряда обстоятельств и поэтому представляет большие трудности.

Эти трудности связаны, во-первых, с тем, что причина и следствие взаимообусловливают друг друга и могут при известных условиях поменяться местами. Их нельзя метафизически противопоставлять. Во-вторых, лишь иногда причинно-следственная связь носит однозначный характер, а чаще причинные связи многозначны. В таких случаях одна причина вызывает ряд следствий, и, наоборот, одно и то же следствие может быть вызвано целым рядом причин. Например, повышенная температура у больного может быть вызвана самыми разными причинами. Врачу часто бывает трудно сразу разобраться, какое из предшествовавших обстоятельств послужило причиной повышения температуры.

В. И. Ленин, в согласии с Ф. Энгельсом, признавая, что причина и следствие в действительном мире носят сложный и противоречивый характер, далее замечает: «Следовательно, человеческое понятие причины и следствия всегда несколько упрощает объективную связь явлений природы, лишь приблизительно отражая ее, искусственно изолируя те или иные стороны одного единого мирового процесса».[48]

В процессе вычленения причинной связи из целостной совокупности сложных обстоятельств (которые в действительности всегда сопровождают причинную связь) мы можем использовать

---

[47] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 10, с. 165.
[48] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 160.

следующие методы для отыскания причинно-следственной связи:
1) метод сходства, 2) метод различия, 3) метод сопутствующих изменений и 4) метод остатков.

1. *Метод сходства.* В методе сходства процесс умозаключения об интересующей нас причине основан на сравнении двух и более случаев предшествующих обстоятельств. Этот метод применяется в тех случаях, когда интересующее нас явление, причину которого нужно установить, возникает в самых различных условиях, но при наличии одного общего для всех явлений обстоятельства. Исследуя эти явления, нужно проанализировать все разнообразные условия их возникновения и выделить общее обстоятельство, предшествовавшее каждому явлению.

Метод сходства обычно формулируется следующими словами: если два или более случаев изучаемого явления имеют общим лишь одно обстоятельство, то это обстоятельство, в котором они сходны между собой, и есть, вероятно, причина искомого явления.

Метод сходства можно выразить следующей общей схемой:

Наблюдаемые случаи	Предшествующие обстоятельства, при которых наступает интересующее нас явление	Исследуемое явление
I	*АБВ*	*а*
II	*АГД*	*а*
III	*АЕЖ*	*а*

Вероятно, обстоятельство *А* есть причина исследуемого явления *а*

В практике мышления этим методом пользуются как в повседневной жизни, так и в научном исследовании.

Данный метод исследования причинной связи можно проиллюстрировать на следующем примере. В колхозном медпункте врач столкнулся с тремя случаями желудочного заболевания. В первом случае приходит колхозник Б. и жалуется на желудочное заболевание. Его расспрашивают о том, что ел, пил. В этот же день приходят еще два колхозника (Г. и Е.) и тоже жалуются на желудочные заболевания. Во всех этих трех случаях заболевания выясняется, что больные имели разные условия жизни: жили в разных семьях, питались по-разному и т. д. Встает вопрос, что могло быть общего (сходного) у этих разных людей, которое могло бы привести к одному и тому же заболеванию. При дальнейших выяснениях обстоятельств оказывается, что все трое перед этим заболеванием работали в одной полевой бригаде и во время работы ходили пить воду из старого пруда. Так врач, обнаружив сходные в этих трех случаях признаки, приходит к выводу, что вероятно, недоброкачественная вода в старом пруду есть причина желудочных заболеваний.

Необходимо отметить, что все индуктивные методы исследования причинной связи, в том числе и метод сходства, дают нам лишь вероятные знания об окружающем мире и в этом состоит ограниченность их познавательного значения. Степень же вероятности вывода в индуктивных методах может колебаться от истинного знания до ложного.

Степень вероятности знания при использовании метода сходства повышается в зависимости от полноты и числа рассматриваемых случаев изучаемых явлений. Чем больше исследуется случаев предшествующих обстоятельств, тем степень вероятности нахождения действительной причины интересующего нас явления повышается.

Вероятность вывода по методу сходства также повышается от того, как значительно различаются предшествующие обстоятельства между собой. Чем больше различий между предшествующими обстоятельствами, за исключением одного сходного обстоятельства, тем выше степень вероятности вывода. И наоборот, если слабо выражено различие в исследуемых случаях, то трудно сделать правильный вывод о единственном предшествующем обстоятельстве как причине исследуемого явления.

В сложных условиях причиной исследуемого явления может служить целый комплекс обстоятельств, несколько варьирующийся в своих составных элементах. Все это затрудняет определение непосредственной причины и требует дополнительного исследования с помощью других методов.

Метод сходства применяется, как правило, при изучении таких явлений, которые можно наблюдать в естественно протекающих условиях. Он не требует искусственного вмешательства в сам процесс изучаемых явлений. Этим он также отличается от следующего метода — метода различия.

2. *Метод различия.* Метод различия применяется тогда, когда интересующее нас явление в одних условиях наступает (присутствует), а в других сходных условиях, отличающихся от первых лишь отсутствием одного из них, интересующее нас явление не наступает (отсутствует). Поэтому все исследуемые обстоятельства при методе различия группируются вокруг лишь двух случаев: в один случай — когда интересующее нас явление наступает, и в другой — когда интересующее нас явление не наступает.

Метод различия обычно формулируется следующими словами: если случай, в котором интересующее нас явление наступает, и случай, в котором это явление не наступает, во всем сходны, за исключением одного обстоятельства, то это единственное обстоятельство, в чем они различны между собой, и есть, вероятно, причина искомого явления.

Метод различия можно выразить следующей общей схемой:

Наблюдаемые случаи	Предшествующие обстоятельства, при которых наступает интересующее явление	Исследуемое явление
I	*АБВГД*	*a*
II	*БВГД*	—

Вероятно, обстоятельство *А* есть причина явления *а*

Этот метод исследования причинной связи можно проиллюстрировать на следующем примере. В одном из номеров журнала «Огонек» описывается такой случай с датскими рыбаками. Рыбаки плыли в двух лодках. У рыбаков, сидевших в одной лодке, улов угрей был хороший, а у рыбаков, сидевших в другой,— самый незначительный. Это обстоятельство сильно озадачило рыбаков, сидевших во второй лодке. Удочки, наживка, крючки и прочие условия лова угрей были совершенно одинаковые, а добыча улова во второй лодке была в четыре раза меньше. В чем дело? Тогда один из рыбаков-неудачников обратил внимание на то, что среди рыбаков, сидевших в первой лодке, никто не курит, а пальцы курильщиков, сидевших во второй лодке, трогавшие наживку, были пропитаны запахом никотина. Тогда рыбаки-курильщики вымыли руки с мылом, и вскоре угри стали клевать.

Метод различия имеет преимущество в сравнении с методом сходства в том, что он более активный метод, так как может быть непосредственно связан с экспериментом, с практической деятельностью людей. В процессе опыта (при экспериментальных испытаниях машин, проверке эффективности изменения социальных условий, проведения опытных исследований в науке и технике и т. д.) человек может искусственно изменять условия, которые предшествуют или сопровождают исследуемые им явления. Все это позволяет при использовании метода различия повысить степень вероятности вывода до уровня достоверного знания.

Часто метод различия в практике познания применяют в соединении с методом сходства. Этим путем также повышается вероятность выводного знания в индуктивных методах познания.

3. *Метод сопутствующих изменений.* В тех случаях, когда существует тесная внутренняя связь причины и следствия, где они однозначно связаны между собой, всегда имеется возможность применить индуктивный метод сопутствующих изменений.

Метод сопутствующих изменений можно сформулировать следующими словами: если возникновение или изменение предшествующего явления всякий раз вызывает возникновение или изменение другого, сопутствующего ему явления, то первое из них есть, вероятно, причина второго явления.

Метод сопутствующих изменений можно выразить следующей схемой:

Наблюдаемые случаи	Предшествующие обстоятельства, при которых наступает интересующее явление	Исследуемое явление
I	*АБВГ*	*а*
II	$А_1БВГ$	$а_1$
III	$А_2БВГ$	$а_2$
IV	$А_3БВГ$	$а_3$

Вероятно, обстоятельство *А* есть причина явления *а*

Нас заинтересовало явление *а*, мы желаем найти причину его появления (или изменения). Для этого изучаем, какие обстоятельства ему предшествуют или сопутствуют ему. Если же из всех предшествующих ему обстоятельств при изменении лишь одного из них происходит изменение интересующего нас явления, то мы можем допустить вероятный вывод, что первое явление есть причина второго.

Этот метод исследования причинной связи можно разобрать на следующем примере. Допустим, нас заинтересовала причина расширения металла. Причем мы замечаем, что чем выше нагревается металл, тем больше он расширяется, а при понижении температуры нагрева металла соответственно уменьшается его объем. Приходим к выводу, что причиной расширения металла, вероятно, является повышение его температуры. С помощью этого метода была обнаружена причинная зависимость между периодическими появлениями и изменениями пятен на Солнце с появлением и изменением полярных сияний.

4. *Метод остатков.* Метод остатков обычно применяется при исследовании сложного комплекса предшествующих обстоятельств, где одна часть компонентов этого комплекса уже изучена, а другая его часть еще подлежит изучению.

Метод остатков обычно формулируется следующими словами: если установлено, что причиной части сложного исследуемого явления не служат известные предшествующие обстоятельства, кроме одного из них, то можно предположить, что это единственное обстоятельство и есть причина интересующей нас части исследуемого явления.

Метод остатков можно выразить следующей схемой:

1. Предшествующие обстоятельства *АБВх* вызывают явление — *абвг*.
2. Известно, что обстоятельства *АБВ* вызывает явление — *абв*.

Вероятно, обстоятельство *Х* есть причина явления *г*.

Классическим примером применения метода остатков в астрономической науке является открытие планеты Нептун по величине отклонения от расчетной орбиты движения Урана. При расчете было учтено влияние Солнца и всех известных тогда планет на движение Урана. Однако это не объясняло реальное движение Урана по орбите, так как в определенном месте он отклоняется от расчетной траектории орбиты. Тогда ученые сделали вывод, что, вероятно, имеется еще одна неизвестная планета, которая и влияет на отклонение Урана от расчетной орбиты. Этот вероятный вывод по методу остатков был в дальнейшем подтвержден. Математики Адамс и Леверье по величине угла отклонения Урана от орбиты высчитали предполагаемое местоположение неизвестной планеты. После этого немецкий астроном Галле навел телескоп на эту точку неба и открыл новую планету Нептун.

Все рассмотренные методы индуктивного исследования причинной связи применяются обычно в сочетании друг с другом, они дополняют друг друга, способствуя тем самым более точному познанию причинных связей в окружающем человека мире.

§ 41. Гипотеза

Общие замечания. Практическая деятельность людей порождает необходимость в новом знании для объяснения ранее неизвестных явлений действительности, различных форм связи между ними т. п. с целью их дальнейшего использования. Отвечая на эту потребность практики, а также на запросы внутреннего развития самого теоретического познания, наука вынуждена строить такие теоретические положения — гипотезы, достоверность которых в данный момент еще не доказана. Гипотеза выступает необходимой формой развития естествознания, как отмечал Ф. Энгельс, и, можно сказать, науки вообще. «Наблюдение открывает какой-нибудь новый факт, делающий невозможным прежний способ объяснения фактов, относящихся к той же самой группе. С этого момента возникает потребность в новых способах объяснения, опирающаяся сперва только на ограниченное количество фактов и наблюдений. Дальнейший опытный материал приводит к очищению этих гипотез, устраняет одни из них, исправляет другие, пока, наконец, не будет установлен в чистом виде закон. Если бы мы захотели ждать, пока материал будет готов *в чистом виде* для закона, то это значило бы приостановить до тех пор мыслящее исследование, и уже по одному этому мы никогда не получили бы закона». [49] Отсюда видно, что достоверные научные теории не могут появиться сразу в готовом виде, но, лишь возникнув сначала как система

[49] Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 555.

предположений, гипотез и претерпев определенную проверку, превращаются в достоверные. В последнем случае ими можно успешно руководствоваться в практической и теоретической деятельности. Выступая формой развития знания, гипотеза не возникает на пустом месте. Основанием ее выдвижения должны выступать общественно-историческая практика людей и предшествующее знание в виде основных законов развития и познания действительности.

Гипотеза как форма развития знания представляет собой отдельное предположение или их совокупность, выдвигаемых для объяснения свойств или причин исследуемых явлений.

Примерами гипотез могут служить следующие суждения: «На Марсе существует жизнь», «Цвет почвы на Венере темнобурый», «Кратеры на острове Саарема образовались вследствие падения большого метеорита». Предположение дает возможность построить систему знания, приводящую к новым результатам, связывая ранее известное с неизвестным, искомым. Без достоверного знания, составляющего фундамент гипотезы, она лишена научной ценности.

Развитие гипотезы. Процесс развития гипотезы предполагает две основные стадии. Первая стадия состоит в выдвижении гипотезы на основе тех или иных фактов и положений науки. Вторая стадия — проверка гипотезы, в процессе которой она подвергается уточнениям и исправлениям, дополняется новыми предположениями и в конечном итоге либо превращается в достоверное знание либо отбрасывается или заменяется новой гипотезой.

Для того чтобы гипотеза могла выполнять свою основную функцию — быть формой развития знания, необходимо руководствоваться некоторыми требованиями в процессе выдвижения гипотез.

Во-первых, гипотеза должна отвечать основным критериям марксистско-ленинской философии. Если гипотеза носит научный характер, то она соответствует законам и принципам материалистической диалектики. Это не означает, однако, что только на основании законов диалектического материализма можно давать научное решение вопроса о принятии или отбрасывании той или иной гипотезы, но позволяет определить, имеем ли мы дело с соперничеством научных гипотез или с борьбой науки и идеализма. Роль марксистско-ленинской философии в развитии гипотез заключается в том, чтобы направить мысль ученого по руслу науки, по руслу обобщения фактов в соответствии с их объективной природой.

Во-вторых, основное содержание гипотезы не должно находиться в противоречии с установленными в данной системе знания законами. Например, ни одна гипотеза в современной физике не должна противоречить закону сохранения энергии. В противном случае она не служила бы развитию этой науки и в конечном счете была бы отброшена. Подобная судьба постигла известную в истории науки гипотезу о теплороде, с помощью которой пытались объяснить процесс горения.

Второе требование или выдвижение гипотез не следует понимать в абсолютном смысле, так как иначе оно исключает возможность развития знания. Если мы сталкиваемся с противоречием между выдвинутой гипотезой и ранее доказанными положениями данной науки, то усомниться нужно прежде всего в гипотезе. Но если новые факты наблюдения все более укрепляют гипотезу, то следует проверить, насколько достоверна та теория, которая противоречит выдвинутой гипотезе. В этом случае, как писал В. И. Ленин, «***Практика выше (теоретического) познания***, ибо она имеет не только достоинство всеобщности, но и непосредственной действительности».[50]

В истории физики известен факт, когда гипотеза о планетарном строении атома, предложенная Розерфордом в 1911 г., противоречила электромагнитной теории в ее классической форме, которую придали ей Максвелл и Лоренц. В результате этого некоторые положения электродинамики подверглись ряду существенных изменений.

Исходя из сказанного, второе требование при выдвижении гипотез можно было бы обобщить следующим образом: выдвигаемая гипотеза не должна противоречить существующим в науке законам и теориям.

В-третьих, при выдвижении гипотезы необходимо стремиться с ее помощью объяснить не часть каких-либо фактов или явлений, а всю их совокупность. Иначе говоря, предположения, составляющие содержание гипотезы, должны быть достаточными для того, чтобы с их помощью можно было объяснить все те факты, относительно которых выдвинута гипотеза.

Данное требование, как и предыдущее, нельзя абсолютизировать. В истории науки известны случаи, когда гипотеза не в состоянии была объяснить отдельный факт из совокупности тех фактов, относительно которых она выдвинута. Это обстоятельство не должно служить достаточным основанием для моментального отбрасывания гипотезы. Наоборот, надо более тщательно работать над дальнейшим уточнением содержания гипотезы, а также тщательнее исследовать сами факты. Например, гипотеза фотосинтеза, выдвинутая К. А. Тимирязевым, вначале противоречила фактам физиологии и физики. Но более детальный анализ этих фактов показал в конечном счете, что они были неправильно истолкованы.

В-четвертых, предположения, составляющие содержание гипотезы, не должны быть логически противоречивыми, т. е. одно не должно быть формально-логическим отрицанием другого.

---

[50] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 195.

В данном случае речь идет о противоречии, которое запрещается законом формальной логики. Формально-логические противоречия вносят в содержание нашего знания субъективный момент; ведущий к искажению действительности. В этом случае, когда логическая противоречивость лежит в самой природе некоторой системы знания и ее нельзя устранить, не разрушив саму систему, исследователь должен отбросить выдвинутую гипотезу и попытаться построить новую систему, лишенную логической противоречивости.

В-пятых, гипотеза должна быть наивозможно простой, то есть такой, которая не требует ввода все новых и новых гипотез или допущений при увеличении числа наблюдений и повышении их точности.

Гипотеза Птолемея о строении мира ставила в центр планетной системы Землю, вокруг которой вращаются Луна, Солнце и другие планеты по определенным эпициклам. Увеличение числа и точности астрономических наблюдений требовало введения новых и новых дополнительных эпициклов, поскольку обнаруживалось расхождение между наблюдаемыми путями движения планет и предсказываемыми. В конечном итоге всеобщая неудовлетворенность астрономов «подстраивающейся» под наблюдения гипотезой привела к замене ее известной гипотезой Коперника — Кеплера. Простота выступает такой характеристикой гипотезы, которая тесно связана с ее истинностью, с возможностью гипотезы верно отражать действительность. Простота выступает своеобразным критерием, позволяющим сделать выбор между несколькими соперничающими гипотезами, поскольку «Мышление человека тогда „экономно", когда оно *правильно* отражает объективную истину...».[51]

Для гипотезы как формы развития научного знания характерно прежде всего стремление на основе обобщения уже имеющихся знаний выйти за его пределы, т. е. сформулировать новые положения, истинность которых еще не доказана. Дальнейшее развитие гипотезы состоит в ее доказательстве, иначе человек не может руководствоваться гипотезой ни в теоретической, ни в практической деятельности. Когда гипотеза становится доказанной, то никакого изменения в ее объективном содержании уже не происходит. Она становится достоверным знанием. Процесс превращения гипотезы как «истины в себе» в «истину для нас» сопровождается расширением человеческого знания, поскольку в процессе доказательства подбираются аргументы, обращаются к новым и новым наблюдениям, обобщают опыт практической деятельности и таким образом происходит обогащение знания новым содержанием.

Проверка или доказательство гипотезы как вторая стадия ее развития предполагает несколько возможностей.

---

[51] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 176.

Во-первых, гипотеза может развиваться, уточняться, конкретизироваться, дополняться новыми положениями, оставаясь при этом гипотезой. Она может включаться в новую систему знания, носящую также гипотетический характер. Гипотеза в данном случае остается положением, истинность которого не доказана. Примером такого положения может служить гипотеза о существовании биологической жизни на других планетах.

Во-вторых, развитие гипотезы может привести к ее отрицанию. Если в процессе обоснования гипотезы будут обнаружены факты и закономерности, отрицающие основное содержание гипотезы, то встает вопрос о замене ее новой гипотезой с иными принципами. Примером тому может служить замена гипотезы Птолемея гипотезой Коперника.

В-третьих, в процессе своего развития гипотеза превращается в достоверное знание. Это происходит тогда, когда доказана истинность лежащего в основе гипотезы принципа. Решающим фактором в превращении гипотезы в достоверное знание является практика.

Рассмотрим общие закономерности проверки гипотезы безотносительно к какой-либо конкретной области науки.

Превращение гипотезы в достоверное знание оказывается возможным в двух случаях. *Во-первых*, когда описываемая гипотезой причина исследуемого явления становится доступной прямому наблюдению. Это оказывается часто возможным вследствие прогресса науки и техники. Классическим примером доказательства гипотезы путем прямого наблюдения является открытие планеты Нептун, вызывающей изменения в траектории движения Урана. *Во-вторых*, гипотеза превращается в достоверное знание, если положения, составляющие ее основное содержание, могут быть выведены в качестве следствий из достоверных посылок. Например, гипотеза Кеплера о формах планетных орбит превращается в закон (достоверное знание) после того, как она дедуктивно следует из закона всемирного тяготения, ранее нашедшего свое практическое обоснование.

В практике познания проверка гипотезы указанными выше способами, превращение гипотезы в достоверное знание оказываются не всегда возможными. Поэтому довольно часто проверка гипотезы осуществляется следующим образом. Из основного содержания гипотезы стремятся вывести как можно большее количество следствий. Если все следствия согласовываются с данными наблюдения и опыта и ни одно из них не противоречит этим данным, то гипотеза считается вероятной. Степень вероятности гипотезы становится тем больше, чем разнообразнее и многочисленнее будут следствия из нее, которые согласуются с опытом. Гипотеза в данном случае продолжает оставаться положением, истинность которого не доказана. Но подтверждаемые практикой следствия из гипотезы повышают ее вероятность, приближают основное содержание гипотезы к достоверному знанию, способствуют ее успешному использованию в практической деятельности людей. Основным показателем при этом является способность гипотезы предсказывать новые факты и явления. Примером такого рода плодотворной гипотезы может служить периодическая таблица Д. И. Менделеева, позволявшая предсказывать свойства еще не открытых элементов.

Способность гипотезы предсказывать и объяснять новые факты определяется ее объективно-истинным содержанием, соответствием вышеперечисленным условиям выдвижения гипотезы. Если содержание гипотезы ложно, то с ее помощью нельзя объяснить новые факты и она не может быть использована в практике познания.

Познавательное значение гипотезы. В процессе проверки гипотезы, в процессе практического подтверждения ее следствий, описывающих или объясняющих ранее неизвестные факты действительности, обнаруживается связь гипотезы с научной теорией. Развитие научных теорий происходит посредством гипотез, поскольку всякое новое знание носит сначала гипотетический характер. Научные теории расширяются и углубляются за счет включения новых положений и конкретизации прежних. Например, в периодической системе Д. И. Менделеева сначала было исходным утверждение о зависимости свойств химических элементов от их атомного веса. Развитие науки видоизменило это положение, установив зависимость свойств элементов от расположения электронов в атоме и от заряда ядра.

Тесная связь научной теории и гипотезы объясняется наличием объективно-истинного знания в них. В то же время между ними существует и различие, вытекающее из относительности практики как критерия истины. Теория в целом, в отличие от гипотезы, является достоверным знанием. Но это не исключает наличия гипотетических элементов в теории и зачастую выступает плодотворным моментом ее дальнейшего развития. Практика каждого данного исторического периода ограничена и не позволяет полностью, абсолютно доказать или опровергнуть все возникающие идеи. Поэтому гипотеза до тех пор, пока дальнейший ход науки не докажет ее, полноправно входит в научную теорию. Гипотезы возникают в процессе развития науки и превращаются в достоверные положения научных теорий, когда практика обнаруживает и подтверждает такие результаты, которые следуют только из данной системы знания. В 40-х годах прошлого столетия К. Маркс высказал основные положения материалистического понимания истории, согласно которым производственные отношения определяют все остальные отношения людей. Как указывает В. И. Ленин, эта идея Маркса для того времени была только гипотезой, но такой, «которая впервые создавала возможность строго научного отношения к историческим и общественным вопросам».[52] Анализ общественно-исторической формации на основе гипотезы К. Маркса привел к открытию закономерностей общественного развития, получивших свое подтверждение в общественно-исторической практике, и гипотеза стала научной теорией.

О превращении гипотезы в научную теорию речь может идти только в том случае, когда она доказывается не отдельными фактами, а целой совокупностью практических результатов. Отдельные же факты могут подтверждать гипотезу, увеличивать вероятность, но не доказывать ее.

§ 42. Вероятностные методы в логике

Вероятностные методы исследования введены в формальную логику сравнительно недавно. Вероятностная логика возникла как непосредственное продолжение индуктивной. Выше сказано, что неполная индукция не дает достоверного вывода. Она дает только вероятный вывод. В этой связи является вполне естественной потребность количественно оценить вероятность того или иного вывода по индукции. Эта потребность могла быть удовлетворена только путем введения в логику точных вероятностных методов, уже разработанных в математике.

Известно также, какое большое значение придается современной наукой гипотетико-дедуктивному методу исследования. Преследуя те же цели, что чисто индуктивные умозаключения, гипотетико-дедуктивные выводы позволяют, однако, получать гораздо более общие результаты. В эмпирических науках гипотетико-дедуктивный метод используется для построения самой теории этих наук. В современных развитых естественных науках, таких, как физика, химия, астрономия и др., он играет доминирующую роль. В известном смысле он поглощает, ассимилирует чисто индуктивные методы. Отдельные изолированные индуктивные обобщения характерны только для наук, не достигших теоретической зрелости. Однако гипотетико-дедуктивные выводы так же недостоверны, как и чисто индуктивные. Они тоже носят вероятностный характер. Поэтому необходимость применения в логике вероятностных методов сохраняется и даже делается более настоятельной. Здесь она выступает в форме потребности оценить степень подтверждения той или иной гипотезы эмпирическими данными.

В математической теории вероятностей понятие вероятности есть характеристика случайных событий, таких, как, например, выпадение герба или решетки при подбрасывании монеты. Опыт показывает, что случайные события обычно обладают устойчивой частотой появления. При достаточно большом числе испытаний отношение числа появлений испытуемого события к числу

[52] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 1, с. 136.

всех испытаний сохраняется, как правило, постоянным. Так, при достаточно большом числе подбрасываний монеты число выпадений герба (как и решетки) будет относиться к числу всех подбрасываний как один к двум. Иначе говоря: относительная частота выпадений герба (решетки) будет в нашем примере равна $^1/_2$.

Описанное свойство случайных событий позволило математикам определить вероятность некоторого случайного события как относительную частоту его появлений при достаточно большом числе испытаний. Так, определенная вероятность $P(A)$ событие A всегда выражается какой-нибудь дробью в интервале от нуля до единицы: $P(A)=\frac{m}{n}$. Здесь m — число появлений события A; n — общее число испытаний. Более строго: $P(A)=$ $=\lim \frac{m}{n}$; $n\to\infty$.

Такая концепция вероятности получила название *частотной* или *статистической*. Еще Джордж Буль предложил ее логическую интерпретацию. Буль предложил рассматривать вместо вероятности самих событий вероятность суждений о событиях. Например, вместо того чтобы говорить о том, что вероятность выпадения герба (решетки) равна одной второй, можно сказать, что вероятность суждения «Выпадает герб (решетка)» равна половине. Логическая интерпретация вероятности оказывается семантической интерпретацией суждений, не являющихся истинными, но и не ложных. Вероятность некоторого события выступает здесь как особого рода истинностное значение выражающего его суждения. Бо́льшая или меньшая вероятность суждения означает бо́льшую или меньшую степень его истинности, его больший или меньший «вес». Чем «весомее» суждение, тем ближе оно к истине. Мы упоминали выше, что вероятность варьируется в интервале от нуля до единицы. В логической интерпретации единица обозначает истину, а нуль — ложь. Суждения, имеющие вероятность, равную единице, — истинны; суждения, имеющие вероятность, равную нулю, — ложны. Разные величины вероятности, располагающиеся между единицей и нулем, выражают промежуточные истинностные значения.

Имеющая описанную семантику вероятностная логика напоминает многозначную. Разница состоит в том, что многозначная логика оперирует множеством дискретных значений истинности, в то время как вероятностная имеет дело с непрерывной шкалой истинностных значений. Статистическая концепция вероятности может быть использована не только в индуктивной логике, но и в модальной с целью вероятностного истолкования модальности суждений.

Помимо статистической концепции вероятности существует еще концепция вероятности как *степени подтверждения гипотез*. Эта концепция впервые была предложена английским логиком

Д.-М. Кейнсом и с самого начала была задумана как логическая, точнее, логико-индуктивная, концепция. Вероятность здесь рассматривается как логическое отношение между суждениями. Одно из этих суждений — всегда некоторая гипотеза, а другое (или другие) выражает результаты тех или иных наблюдений, экспериментов. То отношение, в котором находится та или иная гипотеза к экспериментальным данным, является чисто логическим в том смысле, что установление его не требует дальнейшего обращения к фактам и производится исключительно с помощью логико-математических методов. Гипотеза может подтверждаться экспериментом, может им опровергаться, может не подтверждаться и не опровергаться. Установление отношения между гипотезой и экспериментом имеет первостепенное значение для данной гипотезы с точки зрения степени ее приемлемости в науке. Чем в большей степени гипотеза подтверждается экспериментом, т. е. чем более она вероятна, тем более она приемлема для науки. Если обозначить гипотезу через h, а эмпирические данные, на которых она основывается, — через e, то вероятность гипотезы можно выразить формулой: $c(h/e) = p$, где c — степень подтверждения, а p — число в интервале от нуля до единицы.

Ясно, что с изменением подтверждающих данных e (с получением какой-либо новой информации, например) меняется и вероятность гипотезы h. Но при предположении, что данные e заданы, вероятность гипотезы h определяется исключительно с помощью логико-математических методов. В современной логике здесь имеют место два подхода: 1) *аксиоматический*, или *синтаксический*; 2) *семантический*. Первый из них состоит в задании определенной системы аксиом, которая описывает формальные свойства вероятности. Второй — наиболее популярный и влиятельный — основывается на вероятностном анализе значений суждений.

Само понятие подтверждения понимается в логике двояко. Если опытные данные позволяют говорить лишь о большей или меньшей степени подтверждения гипотез, то такое подтверждение является *сравнительным*. Если же степень подтверждения может быть выражена определенным числом, то такое подтверждение называется *количественным* или *метрическим*. Построение логических систем, описывающих вероятность, понимаемую в сравнительном смысле, легче, чем построение систем, где вероятности можно приписать конкретные числовые значения. Сторонники семантического подхода ставят своей целью создание метрических вероятностных систем, однако более или менее удовлетворительных логик такого рода пока еще не построено.

Следует отметить то обстоятельство, что опытные данные никогда не могут полностью подтвердить гипотезу, из чего следует, что $c(h/e)$ никогда не равно единице.

Концепцию вероятности как степени подтверждения гипотез можно применить и к чисто индуктивным умозаключениям, если истолковать их в соответствующих терминах. Те единичные суждения, которые являются посылками умозаключения по неполной индукции, можно считать эмпирическими данными e, а заключение умозаключения — гипотезой h. Тогда все сказанное выше окажется применимым и к чистой индукции.

Статистическая концепция вероятности и концепция вероятности как степени подтверждения гипотез существуют в современной логике параллельно. Частично они конкурируют между собой, частично же совместимы, поскольку одни логические проблемы решаются при помощи одной из них, а другие — при помощи другой.

Часть вторая

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Вторая часть настоящего учебника представляет собой элементарное введение в символическую логику.

Символическая логика возникла в результате применения к проблемам формальной логики строгих методов, сходных с теми, которые используются в математике. С помощью специального языка формул достигается адекватное описание логической структуры доказательства и осуществляется построение строгих логических теорий.

Искусственный логический язык не содержит омонимических выражений, в нем применяются наиболее экономные и хорошо обозримые способы записи. Являясь инструментом, с помощью которого осуществляется анализ и синтез логических структур, выявляются и фиксируются различные средства получения выводного знания и способы построения доказательных рассуждений, он строится с таким расчетом, чтобы его синтаксические связи однозначно соответствовали логическим связям, а правила преобразования предложений (формул) — логическим преобразованиям. В результате манипуляции с символами искусственного логического языка получают значение логических операций с мыслями.

Символическую логику называют также математической логикой. Но не нужно думать, что в ней исследуются логические вопросы, имеющие значение для одной только математики. Не следует также думать, что методы современной символической логики являются математическими в собственном смысле слова.

Независимо от математики в самой формальной логике, начиная с момента ее возникновения, разрабатывался и постепенно совершенствовался формальный аппарат. Аристотелю принадлежит открытие формального рассмотрения логики, существенным моментом которого является введение в нее переменных (задолго до того, как последние стали применяться в математике). И дело, конечно, не в использовании буквенных обозначений. Стоики, например, в качестве переменных для суждений употребляли порядковые числительные. Важная сторона анализа логической структуры мысли, связанная с введением переменных, состоит в том, что этим обеспечивается возможность абстрактного рассмотрения и формулирования логических законов и правил вывода в общем виде. Другое выдающееся достижение Аристотеля — аксиоматическое построение теории силлогистического вывода — также на десятилетия опередило использование аксиоматического метода в «Началах» Евклида.

Формальная техника силлогистики Аристотеля и логические представления стоиков получили дальнейшее развитие и усовершенствование в средневековой логике, крупнейшими представителями которой были Петр Абеляр (1079—1142), Петр Испанский (1215(?)—1277), Иоанн Дунс Скот (1266—1308), Раймунд Луллий (1235—1315), Уильям Оккам (1300—1349), Жан Буридан (1300—1358).

Основоположником символической логики по праву считают Г. В. Лейбница (1646—1716). Логические идеи этого выдающегося немецкого философа, математика и общественного деятеля не получили должного признания ни у его современников, ни у большинства логиков в XVIII и XIX веках. Главный недостаток всей предшествующей логики заключается, по мнению Лейбница, в отсутствии строгого и точного логического языка, продуманной системы формализации. Он выдвигает широкий проект формализации всего научного знания на основе универсального искусственного языка, благодаря которому содержательные рассуждения можно было бы заменять формальными преобразованиями выражений этого языка. Несмотря на то, что мечта Лейбница о полной формализации научного знания, как показало последующее развитие логики и математики, не может быть осуществлена, его понимание значения искусственного языка в качестве инструмента научного познания и требование широкого использования его для моделирования различных видов интеллектуальной деятельности близки по своему духу научной практике сегодняшнего дня.

Лейбниц первым в истории науки стал строить логические исчисления. Он значительно расширил круг проблем античной и средневековой логики, формализовал расширенную силлогистику и дал ей арифметическую интерпретацию, занимался логикой отношений, установил аналогию между логикой и алгеброй, исследовал связь между категорическими и условными суждениями, пытался сформулировать основные принципы логики и осуществить аксиоматическое построение логической системы. Кроме Лейбница из предшественников современной символической логики должны быть названы Г. П. Плукэ (1716—1790), И. Г. Ламберт (1728—1777), Ж. Д. Жергонн (1771—1859), У. Гамильтон (1788—1856), А. де Морган (1806—1871). К их числу нужно также отнести крупнейшего логика первой половины XIX в. чешского ученого Б. Больцано (1781—1848).

Для Больцано логика — это преимущественно теория науки. Исследуя ее, он употреблял частично формализованный язык, состоящий из обычного разговорного языка, расширенного различными логическими константами, переменными и техническими терминами, которым в большинстве случаев дается точное определение. Только нормализовав языковые выражения, сведя их к каноническим формам, полагал он, можно добиться чисто формальной трактовки логики. Значительнейшим научным достижением Больцано была его теория логического вывода, детально развитая и отвечающая высоким критериям научной строгости.

Однако начало систематическому развитию символической логики было положено работами английского математика Д. Буля (1815—1864). Идеи, содержавшиеся в его книгах «Математический анализ логики» (1847) и «Исследование законов мысли» (1854), стали исходным пунктом дальнейшего развития логики. Изложенная в них формальная система «исчисления логических равенств», являясь далеко идущим обобщением аристотелевской силлогистики, вооружала развитой техникой решения ряда общих задач логики классов. Так, например, им был развит общий метод для получения следствий из любого числа посылок с любым числом терминов. Свою формальную систему Буль называл «алгеброй логики». Он исследовал ее связь с обычной алгеброй и интерпретировал не только как логику классов (терминов), но и как логику суждений (предложений) и как логику вероятностей (исчисление вероятностей). Буль подчеркивал значение для точной науки искусственного языка, содержащего набор символических средств и способов оперирования с ними, который подобно живому разговорному языку являлся бы инструментом рассуждения, но отличался бы большей точностью. По его мнению, закономерности оперирования с логическими символами должны отражать законы человеческого мышления.

Созданная Д. Булем «алгебра логики» получила дальнейшее развитие в трудах У. С. Джевонса (1835—1882), Э. Шрёдера (1841—1902), Д. Венна (1834—1923) и других логиков конца XIX века. Ее формальная техника подверглась переработке и систематизации, а логические идеи — обобщению и углублению. Существенную роль в совершенствовании ряда теоретических и технических аспектов алгебры логики сыграли работы казанского математика и астронома П. С. Порецкого (1846—1907).

Большое значение для формирования современных представлений о предмете и методах символической логики имели работы выдающегося немецкого ученого Г. Фреге (1848—1925). Опубликованная в 1879 г. его книга «Исчисление понятий» содержала изложенную аксиоматическим методом при помощи специального искусственного языка строгую логическую теорию. В этой работе Фреге впервые дает непротиворечивую трактовку логических переменных, логических и внелогических констант, логических функций и кванторов, логических аксиом и правил вывода, понятия доказательства и доказуемого предложения. Свое исчисление понятий он применяет к анализу оснований математики, стремясь дать логическую интерпретацию основным понятиям теории множеств и арифметики. Развитая им общая теория смысла и значения языковых выражений оказала большое влияние на исследования в области логической семантики. Выдающиеся достижения Фреге в области логики позволяют считать его основоположником современной логики.

Большую роль в распространении и дальнейшем развитии идей Фреге сыграл трехтомный труд английских ученых Б. Рассела (1872—1970) и А. Н. Уайтхеда (1861—1947) «Principia mathematica» (1910—1913). Крупнейшие результаты, определившие современное состояние этой науки, были получены в 30-х годах XX в. К. Гёделем (Австрия), А. Тарским (Польша), Г. Генценом (Германия) и А. Чёрчем (США). Значительный вклад в развитие современной логики внесли советские ученые А. Н. Колмогоров, П. С. Новиков, А. И. Мальцев, А. А. Марков, Н. А. Шанин и другие.

В настоящее время символическая логика — это интенсивно развивающаяся наука, которая включает ряд самостоятельных теорий и независимых направлений исследования. В последние годы символическая логика получила разнообразные применения во многих областях науки и техники: в математике и кибернетике, биологии и лингвистике, педагогике и праве, философии и социологии.

Глава I

ТАБЛИЧНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 1. Высказывания и формы высказываний

Высказыванием называют предложение, выражающее суждение. Если суждение, составляющее содержание (смысл) некоторого высказывания, истинно, то о данном высказывании говорят, что оно истинно. Сходным образом ложным называют такое высказывание, которое является выражением ложного суждения. Например, предложения: *Ленинград — большой город*; *Все деревья — растения* и *Если $2<3$, то $2+1<3+1$* являются истинными высказываниями, а предложения *Париж столица Англии*; *Некоторые киты — рыбы* и *Если 7 простое число, то 7 четное число* являются ложными высказываниями. Будем считать, что: а) всякое высказывание истинно или ложно и б) ни одно высказывание не является сразу истинным и ложным.

Истинность и ложность называют **логическими**, или **истинностными**, значениями высказываний. Если высказывание истинно, то говорят, что оно имеет логическое значение **истина**, а если высказывание ложно, то говорят, что оно имеет логическое значение **ложь**.

Слова: *не*; *неверно, что*; *и*; *или*; *если ..., то*; *тогда и только тогда, когда; либо ..., либо; несовместно; ни ..., ни; не ..., но; но, не* и их ближайшие синонимы называют **логическими союзами** (**связками**), слова *для всех ... имеет место, что; для некоторых ... имеет место, что* и их ближайшие синонимы называют **кванторами**. Логические союзы и кванторы называют **логическими постоянными**. Они служат для выражения мыслей как в повседневных рассуждениях, так и в научных доказательствах. Логика занимается установлением точного смысла этих слов и общих законов их употребления.

Высказывания, не содержащие логических постоянных, называют **элементарными высказываниями**. Ими являются, например, следующие предложения: (а) *Аристотель — воспитатель Александра Македонского*; (б) *Аристотель старше Александра Македонского*: (в) *$5<7$* и (г) *5 — четное число*; элементарные высказывания (а), (б), (в) имеют логическое значение **истина**, а (г) — логическое значение **ложь**.

Высказывания, которые содержат логические постоянные, называют **сложными высказываниями**. Например, с помощью логического союза *если..., то* из элеметарных высказываний (а) и (б) можно образовать сложное высказывание; *Если Аристотель — воспитатель Александра Македонского, то*

Аристотель старше Александра Македонского, а из (в) и (г) — сложное высказывание: *если 5 < 7, то 5 — четное число.*

Сложные высказывания тоже истинны или ложны; так, первое из приведенных выше сложных высказываний истинно, а второе — ложно. Логическое значение сложного высказывания зависит от логического значения высказываний, входящих в его состав. Например, когда логическим союзом *если ..., то* связывают истинные элементарные высказывания (а) и (б), получают истинное сложное высказывание: *Если (а), то (б)*, а когда тем же логическим союзом связывают истинное и ложное элементарные высказывания (в) и (г), получают сложное высказывание *Если (в), то (г)*, которое ложно. Но если те же самые истинные элементарные высказывания (а) и (б) связать логическим союзом *либо ..., либо*[1], то сложное высказывание *Либо (а), либо (б)* будет ложным. Если же истинное и ложное элементарные высказывания (в) и (г) связать логическим союзом *и*, а затем перед получившимся сложным высказыванием поставить логический союз *неверно, что*, то высказывание *Неверно, что (в) и (г)* будет истинным сложным высказыванием. Таким образом, логическое значение сложного высказывания определяется логическим значением входящих в его состав элементарных высказываний и теми логическими постоянными, с помощью которых оно построено.

Рассмотрим теперь неполные высказывания *... — человек, ... есть простое число* и т. п. Если в эти неполные высказывания вместо точек подставлять единичные термины (собственные имена, описания отдельных предметов и пр.), то будут получаться истинные и ложные высказывания. Так, если в первом из них точки заменить собственным именем *Сократ*, а во втором — цифрой *5*, то неполные высказывания превратятся в истинные элементарные высказывания *Сократ — человек* и *5 есть простое число.* Если же в первом из них точки заменить собственным именем *Жучка*, а во втором — цифрой *6*, то они превратятся в ложные элементарные высказывания *Жучка — человек* и *6 есть простое число.*

Вместо точек для указания тех пробелов в неполных высказываниях, при заполнении которых они превращаются в высказывания, мы будем употреблять буквы *x*, *y*, *z*, ..., которые называют **предметными переменными**, и писать *x — человек*, *y есть простое число* и т. д. Неполные высказывания, которые содержат предметные переменные, называют **формами высказываний**.

Формы высказываний *x — человек*, *y есть простое число* выражают не суждения, а условия, которым одни объекты удовлетворяют, а другие нет. С помощью каждой из таких форм

---

[1] Этот союз употребляется здесь в смысле: либо одно, либо другое, но не то и другое вместе.

можно определить класс предметов, для которых выполняется выражающееся в них условие. Если термин, обозначающий предмет, при подстановке вместо предметной переменной дает истинное высказывание, то предмет принадлежит данному классу, если же при такой подстановке получают ложное высказывание, то — не принадлежит. Например, с помощью формы высказывания *x — человек* из множества всех живых существ можно выделить класс таких, которые обладают свойством *быть человеком*, а с помощью формы высказывания *y есть простое число* из множества целых положительных чисел можно выделить класс чисел, обладающих свойством *быть простым числом.*

Существуют формы высказываний с двумя предметными переменными (с двумя пробелами); например, *x старше y* (*...старше___*); $x > y$ $(... > \_\_\_)$ и т. п. Если вместо всех предметных переменных (мест, отмеченных точками и черточками) подставить единичные термины, то получим истинные или ложные высказывания. Если в первом примере вместо *x* и *y* подставить собственные имена *Маяковский* и *Есенин,* а во втором примере — цифры *3* и *2,* то получим истинные высказывания *Маяковский старше Есенина* и *3>2.* Если же в этих примерах вместо *x* и *y* подставить соответственно *Есенин* и *Маяковский, 2* и *3,* то получим ложные высказывания *Есенин старше Маяковского* и *2>3.*

Формы высказываний с двумя предметными переменными выражают условия, которым одни упорядоченные пары объектов удовлетворяют, а другие — не удовлетворяют. С помощью каждой из них можно определить класс упорядоченных пар объектов, связанных соответствующим отношением. Например, с помощью формы высказывания *x старше y* из множества всех людей можно выделить класс упорядоченных пар, которые связаны отношением *старше,* а с помощью формы высказывания $x > y$ из множества рациональных чисел выделить класс упорядоченных пар, находящихся в отношении $>$. Существуют формы высказываний с тремя, четырьмя и большим числом предметных переменных. Например, по три предметных переменных содержат формы высказываний *x находится между y и z*, *z есть сумма чисел x и y* и т. п. Из первой истинное высказывание получается при подстановке вместо *x*, *y* и *z* соответственно собственных имен *Бологое, Ленинград, Москва*, а из второго при подстановке цифр *2, 3, 5*. Формы высказываний с тремя и большим числом предметных переменных выражают условия, которым удовлетворяют одни тройки, четверки и т. д. предметов и не удовлетворяют другие, они определяют классы упорядоченных троек, четверок и т. д. предметов.

Если в форме высказывания, содержащей несколько предметных переменных, осуществить подстановку только для одной из них, то получится форма высказывания с меньшим числом предметных переменных. Например, форма высказывания *x сов-*

ременник y после подстановки вместо предметной переменной y собственного имени *Пушкин* превращается в форму высказывания *x современник Пушкина.*

С помощью логических союзов формы высказывания можно связывать как друг с другом, так и с высказываниями, например, формы высказываний $x > y$, $y > z$ можно связать логическим союзом *и*, в результате получим сложную форму высказываний $x > y$ *и* $y > z$. Она выражает новое условие, которому удовлетворяют одни тройки чисел, и не удовлетворяют другие.

Одна и та же предметная переменная может входить в форму высказывания два, три и большее число раз. Например, переменная y входит в форму высказывания $x > y$ *и* $y > z$ дважды. Осуществляя подстановку, необходимо следить за тем, чтобы вместо одной и той же предметной переменной на всех местах, где она входит в данную форму высказывания, подставлялось одно и то же собственное имя. Например, из формы высказывания $x > y$ *и* $y > z$ в результате подстановки можно получить истинное высказывание $5 > 3$ *и* $3 > 2$, но нельзя получить высказывания $5 > 4$ и $3 > 2$.

Итак, в результате подстановки единичных терминов вместо всех предметных переменных форма высказывания превращается в истинное или ложное высказывание. Но формы высказываний могут превращаться в высказывания и в результате присоединения к ним кванторов. Если, например, перед формой высказывания *Если x — металл, то x проводит электричество,* содержащей единственную предметную переменную x, поставить квантор *для всех ... имеет место, что*, с указанием, что он относится к этой переменной, то форма высказывания превратится в истинное высказывание *Для всех x имеет место, что если x — металл, то x проводит электричество.* Сходным образом, поставив перед формой высказывания *x — простое число и* $x > 10^{10}$, квантор *для некоторых ... имеет место, что* с переменной x получаем истинное высказывание *Для некоторых x имеет место, что x — простое число и* $x > 10^{10}$.

Кванторы «связывают» предметные переменные в том смысле, что вместо переменной, находящейся в области действия квантора, нельзя уже больше подставлять единичные термины. Если с помощью кванторов «связать» все переменные, содержащиеся в данной форме высказывания, то образуется истинное или ложное высказывание.

§ 2. Язык логики высказываний

Язык логики высказываний — это искусственный язык, предназначенный для анализа логической структуры сложных высказываний.

А л ф а в и т я з ы к а л о г и к и в ы с к а з ы в а н и й содержит следующие три категории знаков,

1. Пропозициональные буквы (пропозициональные переменные)[2]:

$$p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ p_1,\ q_1,\ r_1,\ s_1,\ t_1,\ p_2,\ q_2,\ \ldots .$$

2. Логические знаки (логические союзы): $\sim$ — знак отрицания; $\wedge$ — знак конъюнкции; $\vee$ — знак дизъюнкции; $\rightarrow$ — знак импликации, $\leftrightarrow$ — знак эквивалентности, $\not\leftrightarrow$ — знак строгой дизъюнкции.

3. Технические знаки: (— левая скобка;) — правая скобка.

Никаких других знаков в языке логики высказываний нет.

Роль структурных образований, аналогичных элементарным и сложным высказываниям, играют в этом языке формулы. Формулы — это такие конечные последовательности знаков алфавита, которые построены по определенным правилам и образуют законченные выражения языка логики высказываний.

Определение формулы логики высказываний: 1) пропозициональная переменная есть формула; 2) если **A** произвольная формула, то $\sim$**A** [читается: «не **A**» или «неверно, что **A**»] — тоже формула; 3) если **A** и **B** — произвольные формулы, то (**A** $\wedge$ **B**) [читается: «**A** и **B**»], (**A** $\vee$ **B**) [читается: «**A** или **B**»]; (**A** $\rightarrow$ **B**) [читается: «если **A**, то **B**»], (**A** $\leftrightarrow$ **B**) [читается: «**A** тогда и только тогда, когда **B**»], (**A** $\not\leftrightarrow$ **B**) [читается: «либо **A**, либо **B**»] — тоже формулы.

Никаких других формул, кроме указанных в пп. 1) — 3), в языке логики высказываний нет.

Заглавные латинские буквы **A** и **B**, которые употребляются в определении формулы, принадлежат не языку логики высказываний, а его метаязыку, т. е. тому языку, на котором мы говорим о языке логики высказываний, и служат для обозначения произвольных формул, записанных на языке логики высказываний. В отличие от букв, которые являются пропозициональными переменными, их называют метапеременными, или метабуквами.

Содержащие метабуквы выражения $\sim$**A**, (**A** $\wedge$ **B**), (**A** $\vee$ **B**), (**A** $\rightarrow$ **B**), (**A** $\leftrightarrow$ **B**) и (**A** $\not\leftrightarrow$ **B**) — не формулы, а схемы формул определенного вида. Например, выражение (**A** $\wedge$ **B**) есть схема формул $(p \wedge q)$, $((p \rightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow s))$, $(p \wedge (p \vee q))$, $(p \wedge p)$ и т. п., а выражение (**A** $\vee$ **A**) — схема формул $(p \vee p)$, $(\sim q \vee \sim q)$ и $((p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow r))$, но не схема формулы $(p \vee q)$. В дальнейшем мы часто будем говорить «формула (**A** $\wedge$ **B**)», подразумевая любую формулу логики высказываний соответствующего вида, а не саму запись (**A** $\wedge$ **B**), которая является схемой формул.

Относительно любой последовательности знаков алфавита языка логики высказываний можно решить, является она фор-

---

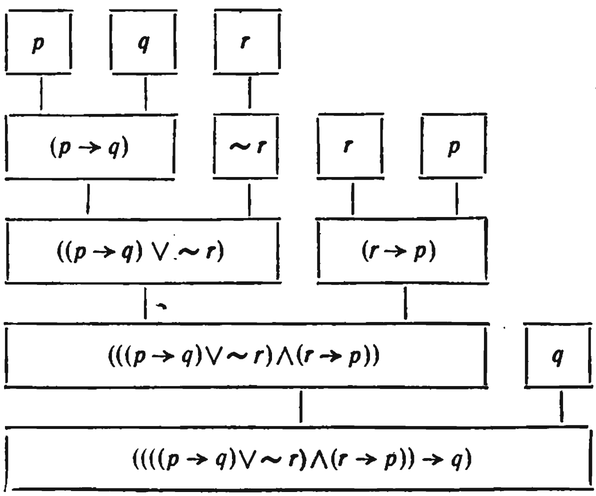
[2] От propositio (лат.) — высказывание; логику высказываний называют также пропозициональной логикой.

мулой или нет. Если эта последовательность может быть построена в соответствии с п.п. 1.—3. определения формулы, то она — формула, если нет, то не формула. Так, последовательность знаков

$$((((p \to q) \lor \sim r) \land (r \leftrightarrow p)) \to q)$$

является формулой потому, что она может быть построена в соответствии с этими пунктами. Действительно, на основании п. 1. пропозициональные переменные p и q являются формулами. Тогда согласно п. 3. при условии, что в качестве **A** взята пропозициональная переменная p, а в качестве **B** — пропозициональная переменная q, выражение $(p \to q)$ является формулой. А так как пропозициональная переменная r в силу п. 1. есть формула, то выражение $\sim r$ согласно п. 2. и выражение $((p \to q) \lor \sim r)$ согласно п. 3. при условии, что в качестве **A** взята формула $(p \to q)$, а в качестве **B** — формула $\sim r$, тоже есть формула. Поскольку согласно п. 3. при условии, что в качестве **A** взята пропозициональная переменная r, а в качестве **B** переменная p, выражение $(r \leftrightarrow p)$ есть формула, постольку выражение $(((p \to q) \lor \sim r) \land (r \leftrightarrow p))$ в силу того же п. 3., но при условии, что **A** это $((p \to q) \lor \sim r)$, а **B** это $(r \leftrightarrow p)$, тоже является формулой. И наконец, все анализируемое выражение согласно п. 3. при условии, что в качестве **A** взята формула $(((p \to q) \lor \sim r) \land (r \leftrightarrow p))$, а в качестве **B** пропозициональная переменная q, есть формула логики высказываний. Таким образом, анализируя последовательности знаков алфавита языка логики высказываний, мы проверяем, являются они формулами или нет.

Схему процесса построения формулы удобно представлять в виде следующей древовидной фигуры, которую называют **деревом формулы**



Ясно, что последовательности знаков алфавита

$$p \to); \quad (p \to q(; \quad ((p \to q)); \quad p \to q; \quad (\sim r)$$

не являются формулами логики высказываний, так как ни одна из них не может быть построена в соответствии с п.п. 1—3 определения формулы. Четвертое из этих выражений, например, не является формулой, так как соединение формул знаком $\to$ всегда сопровождается заключением в скобки.

Любая часть формулы, которая сама есть формула, называется подформулой данной формулы. Например, подформулами анализируемой выше формулы являются переменные p, q, r (каждая из которых дважды входит во всю формулу), формулы

$$\sim r, (p \to q), ((p \to q) \vee \sim r),$$
$$(r \leftrightarrow p), (((p \to q) \vee \sim r) \wedge (r \leftrightarrow q))$$

и, наконец, вся формула

$$((((p \to q) \vee \sim r) \wedge (r \leftrightarrow p)) \to q),$$

которая рассматривается как часть самой себя. Но, например, такие части рассматриваемой формулы как

$$(((p \to \quad \text{или} \quad (r \leftrightarrow p)) \to q)$$

не являются ее подформулами, так как не являются формулами.

Подформулы **A** и **B** в формуле $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ называются ее конъюнктивными членами, или конъюнктами, а в формуле $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$ — ее дизъюнктивными членами, или дизъюнктами. В формуле $(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ подформула **A** называется ее антецедентом, а подформула **B** — ее консеквентом.

Логический знак, который при построении формулы применяется последним, называется главным логическим знаком данной формулы.

Каждая формула логики высказываний превращается в истинное или ложное высказывание, если все входящие в нее пропозициональные переменные заменить конкретными истинными или ложными высказываниями. Так, если в формуле

$$(p \to q)$$

переменную p заменить высказыванием *12 делится на 6*, переменную q — высказыванием *12 делится на 2 и 12 делится на 3*, логический знак $\to$ заменить словами, соответствующими его прочтению (они указаны в определении формулы), и отбросить скобки, то получим высказывание *Если 12 делится на 6, то 12 делится на 2 и 12 делится на 3*.

Если какая-нибудь переменная входит в формулу больше одного раза, то на всех местах, где она входит в данную формулу, ее нужно заменять одним и тем же высказыванием. Например, из формулы

$$((p \wedge q) \rightarrow p)$$

можно получить высказывание *Если 12 делится на 2 и 12 делится на 3, то 12 делится на 2*, но нельзя получить ни высказывания *Если 12 делится на 2 и 12 делится на 3, то 12 делится на 5*, ни высказывания *Если 12 делится на 2 и 12 делится на 3, то 12 делится на 6.*

В дальнейшем, вместо того чтобы говорить, что формула в результате замены переменных истинными или ложными высказываниями превращается в истинное или ложное высказывание, мы будем говорить, что когда все переменные формулы принимают (получают) логическое значение «истина» или «ложь», то и формула принимает (получает) одно из этих значений. Рассматривая вместо высказываний их логические значения, мы подчеркиваем, что нас интересует не конкретное содержание отдельных высказываний, а только то, истинны они или ложны.

Кроме описанного выше логического языка, употребляются языки с другим алфавитом. В некоторых из них для обозначения пропозициональных переменных употребляются первые буквы латинского алфавита (заглавные или строчные), для обозначения отрицания используют знаки $\bar{}$ и $\urcorner$, для конъюнкции & и $\cdot$, для импликации знак $\supset$, для эквивалентности $\sim$ и $\equiv$, для строгой дизъюнкции $\not\equiv$ и другие. В качестве метабукв употребляют буквы готического и греческого алфавита. Существуют также языки, в которых вместо скобок в качестве разделительных знаков употребляют точки или квадратики.

Наконец, прибегают к следующему бесскобочному логическому языку, предложенному польским логиком Я. Лукасевичем. А л ф а в и т: пропозициональные переменные — $p, q, r, s, \ldots$, логические знаки — N (отрицание), K (конъюнкция), A (дизъюнкция), C (импликация), E (эквивалентность), J (строгая дизъюнкция).

О п р е д е л е н и е ф о р м у л ы: 1) пропозициональная переменная есть формула; 2) если α формула, то $N\alpha$ формула; 3) если α и β формулы, то $K\alpha\beta$, $A\alpha\beta$, $C\alpha\beta$, $E\alpha\beta$ и $J\alpha\beta$ — формулы.

Таким образом, формула

$$((\sim p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \vee (r \wedge \sim s)))$$

будет в этом языке иметь вид

$$CENpqApKrNs$$

и т. п.

Упражнения:

I. Проверить, являются ли следующие выражения формулами логики высказываний и для каждой формулы построить «дерево формулы»:

1. $((((p \to r) \lor q) \land \sim p) \to (p \land q))$;
2. $((p \leftrightarrow q) \to ((p \nleftrightarrow r) \land \sim r)$;
3. $((p \land q) \to (q \lor r) \land (p \leftrightarrow r))$;
4. $((\sim (\sim p \land q) \lor p) \sim r$.

II. Как можно расставить скобки в следующих последовательностях знаков, чтобы получилась формула:

1. $\sim p \land \sim q \lor r$;
2. $\sim \sim p \land q \to \sim r \leftrightarrow \sim q$.

III. Перевести на язык Лукасевича следующие формулы:

1. $(((p \to q) \to r) \to s)$;
2. $(p \to (q \to (r \to s)))$;
3. $(((p \nleftrightarrow q) \land \sim r) \to ((r \leftrightarrow s) \lor \sim (p \land q)))$.

IV. Перевести с логического языка Лукасевича на наш язык следующие формулы:

1. *KpNCNqArs*;
2. *ANCKNANrqrsNp*;
3. *AENpJqrCCKprAqspr*.

§ 3. Семантика логических знаков

Точный смысл (семантика) логических знаков может быть разъяснен с помощью специальных таблиц, в которых зафиксировано, при каких логических значениях формул **A** и **B** формулы $\sim$ **A**, (**A** $\land$ **B**), (**A** $\lor$ **B**), (**A** $\to$ **B**), (**A** $\leftrightarrow$ **B**) и (**A** $\nleftrightarrow$ **B**) истинны, а при каких ложны.

Рассмотрим таблицы формул, содержащих в качестве главного логического знака различные логические союзы.

Отрицание

A	$\sim$ **A**
и	л
л	и

В первом столбце таблицы выписаны оба возможных логических значения формулы **A**: истина (и) и ложь (л), а во втором столбце — соответствующее логическое значение формулы $\sim$**A**. Из таблицы видно, что когда формула **A** истинна, формула $\sim$**A** ложна, а когда формула **A** ложна, формула $\sim$**A** истинна. Например, если *6 — четное число* истинное высказывание, то *Неверно, что 6 — четное число* ложное высказывание.

Если же *6 — простое число* ложное высказывание, то *Неверно, что 6 — простое число* ложное высказывание.

Конъюнкция

A	B	(A∧B)
и	и	и
л	и	л
и	л	л
л	л	л

Так как каждая из формул **A** и **B** может быть истинной или ложной, то возможны четыре различных случая: **A** и **B** обе истинны; **A** ложна, а **B** истинна; **A** истинна, но **B** ложна; наконец, **A** и **B** обе ложны. Таблица построена таким образом, что в первых двух столбцах каждая строка — это одно из возможных сочетаний логических значений **A** и **B**. Для каждого из них в соответствующей строке третьего столбца указано логическое значение (**A** ∧ **B**). Из таблицы видно, что формула (**A** ∧ **B**) истинна в случае, когда формулы **A** и **B** истинны, и ложна в остальных.

Например, если *2 — простое число* и *2 — четное число* истинные высказывания, то *2 — простое число и 2 — четное число* истинное высказывание, если же взять ложное высказывание *4 — простое число* и истинное высказывание *4 — четное число*, то *4 — простое число и 4 — четное число* будет ложным высказыванием; если взять истинное высказывание *5 — простое число* и ложное высказывание *5 — четное число*, то *5 — простое число и 5 — четное число* будет ложным высказыванием и, наконец, если взять ложные высказывания *9 — простое число* и *9 — четное число*, то *9 — простое число и 9 — четное число* будет ложным высказыванием.

Дизъюнкция

A	B	(A∨B)
и	и	и
л	и	и
и	л	и
л	л	л

Формула (**A** ∨ **B**) истинна тогда и только тогда, когда истинна по крайней мере одна из формул **A** и **B**. Например, высказывание *У него хорошие способности к математике или он раньше уже решал такие задачи* истинно в том случае, когда истинно высказывание *У него хорошие способности к математике*, но ложно высказывание *Он раньше уже решал такие задачи*, в том случае, когда ложно высказывание *У него хорошие способности к математике*, но истинно высказывание *Он раньше уже решал такие задачи*, а также в том случае, когда истинны оба высказывания *У него хорошие способности к математике* и *Он раньше уже решал такие задачи.* И только, когда ложны оба дизъюнкта, т. е. ложно высказывание *У него хорошие способности к математике* и ложно высказывание *Он раньше уже решал такие задачи*, сложное высказывание *У него хорошие способности к математике или он раньше уже решал такие задачи* ложно.

Импликация

A	**B**	**(A → B)**
и	и	и
л	и	и
и	л	л
л	л	и

Формула **(A → B)** ложна тогда и только тогда, когда формула **A** истинна, а **B** ложна, и истинна, если формула **A** ложна или если формула **B** истинна.

Настоящая таблица, в особенности вторая и четвертая ее строки, требует пояснения. Прежде всего следует учитывать, что в естественных языках союз *если ..., то* употребляется в разных смыслах: для выражения причинной зависимости (*если воду нагреть до 100°, то она превратится в пар; если река замерзла, то был мороз*), для выражения временной последовательности событий (*если сегодня пятница, то завтра суббота*), для выражения связи цели и средства (*если не хочешь ошибиться, то будь внимателен*), для выражения какой-нибудь условной договоренности (*если ты решишь все задачи, то получишь зачет*) и т. д., в каждом из которых *если..., то* имеет свою специфику. Однако мы отвлекаемся от того, какова природа зависимости **B** от **A**, и придаем союзу *если..., то* только тот смысл, который выражен в таблице.

Данное уточнение смысла *если..., то* оправдано обычным словоупотреблением. Ведь когда полагают истинным сложное высказывание: *Если* **A**, *то* **B**, обычно не хотят сказать, что **A** и **B** обязательно истинны, а только стремятся указать, что если **A** истинно, то истинным будет и **B** (т. е. что если **A** истинно, то **B** не может быть ложным), если же **A** ложно, то **B** может быть как истинным, так и ложным. Точно так же **B** может быть истинным как при истинном, так и при ложном **A**.

Рассмотрим, например, сложное высказывание *Если данное слово стоит в начале предложения, то данное слово пишется* *с большой буквы.* Слово может не стоять в начале предложения, но писаться с большой буквы (разумеется, уже по другому основанию). Слово может не стоять в начале предложения и не писаться с большой буквы, и тем не менее сложное высказывание о том, что если оно стоит в начале предложения, то пишется с большой буквы, остается истинным. Сложное высказывание окажется ложным, только если данное слово стоит в начале предложения, но не пишется с большой буквы, т. е. только если высказывание *Данное слово стоит в начале предложения* истинно, а высказывание *Данное слово пишется с большой буквы* при этом ложно.

В том, что таблица для импликации выражает обычный, принятый и в традиционной логике смысл союза *если..., то*, можно убедиться, проанализировав употребление союза *если..., то* в условно-категорическом силлогизме.

Исходя из истинности суждений: *А* и *Если А, то В*, заключают об истинности суждения *В*. Это, как известно, modus ponens (утверждающий способ) условно-категорического силлогизма. В таблице данный логический факт представлен первой ее строкой, где при истинных **A** и **(A → B)** формула **B** истинна. Рассмотрим также случай, когда суждение *В* ложно, а суждение *Если А, то В* — истинно. Эти посылки определяют modus tollens (отрицающий способ) условно-категорического силлогизма, согласно которому суждение *А* ложно. Этому случаю в таблице отвечает ее четвертая строка.

Рассмотрим теперь случаи, когда суждение *А* ложно, а суждение *Если А, то В* истинно. Известно, что из таких посылок не следует ни истинность, ни ложность *В*. Этому случаю в таблице отвечают две строки, вторая и четвертая, причем во второй — **B** истинно, а в четвертой — ложно.

Рассмотрим далее случай, когда при истинном суждении *Если А, то В* суждение *В* тоже истинное. Хорошо известно, что из таких посылок также не следует ни истинность, ни ложность *А*. В таблице этому случаю соответствуют строки первая и вторая — в первой **A** истинно, во второй — ложно.

Наконец, целесообразность такого уточнения союза *если..., то*, которое дано в таблице для импликации, можно пояснить следующими соображениями.

Теорема *Если число делится на 6, то оно делится на 3* истинна не только потому, что существуют числа, для которых истинно как то, что они делятся на 6, так и то, что они делятся на 3. Истинность этой теоремы для всех чисел не подрывается ни существованием чисел, не делящихся на 6, но делящихся на 3 (например, числа 15), ни существованием чисел, не делящихся ни на 6, ни на 3 (например, числа 13). Единственное, что сделало бы эту теорему ложной, это существование такого числа, которое, делясь на 6, не делилось бы на 3. Известно, что такого числа нет, и поэтому наша теорема истинна для всех целых чисел.

Эквивалентность

A	B	(A ↔ B)
и	и	и
л	и	л
и	л	л
л	л	и

Формула (**A** ↔ **B**) истинна либо когда формулы **A** и **B** обе истинны, либо когда они обе ложны. Например, сложное высказывание *Данный прямоугольник — квадрат тогда и только тогда, когда все стороны данного прямоугольника равны* истинно потому, что когда истинно высказывание *Данный прямоугольник — квадрат* истинно и высказывание *Все стороны данного прямоугольника равны*, а когда ложно высказывание *Данный прямоугольник — квадрат*, то ложно и высказывание *Все стороны данного прямоугольника равны*. И сложное высказывание было бы ложным, если нашелся бы прямоугольник, относительно которого истинно высказывание *Данной прямоугольник — квадрат*, но ложно высказывание *Все стороны данного прямоугольника равны* или если бы нашелся прямоугольник, относительно которого ложно высказывание *Данный прямоугольник — квадрат*, но истинно высказывание *Все стороны данного прямоугольника равны*.

Исключающая дизъюнкция

A	B	(A ↮ B)
и	и	л
л	и	и
и	л	и
л	л	л

Формула (**A** ↮ **B**) истинна, когда **A** ложно, но **B** истинно, или когда **A** истинно, но **B** — ложно. В остальных случаях она ложна.

Например, высказывание *Либо данное дерево лиственное, либо данное дерево хвойное* истинно потому, что относительно одного и того же дерева высказывания *Данное дерево лиственное* и *Данное дерево хвойное* не могут быть ни одновременно истинными, ни одновременно ложными.

Построив искусственный логический язык, постоянным которого придан точный смысл, мы можем теперь переводить на него выражения естественного языка. Перевод с обычного разговорного языка на язык логики высказываний осуществляется в результате содержательного анализа смысла предложений. Отсутствие формальной процедуры перехода от высказываний к формулам объясняется тем, что в естественных языках нет однозначного соответствия между смыслом и способами его выражения. В них обычно имеется несколько различных способов выражения одной и той же мысли (явление синонимии), а одно и то же предложение может выражать разные мысли (явление омонимии).

Перевод с естественного языка на язык логики высказываний затрудняется, в частности, синонимией и омонимией, которые связаны со словами естественного языка, выражающими логические постоянные. Например, знаку $\rightarrow$, точный смысл которого в языке логики высказываний определяется таблицей, соответствуют в естественном языке не только слова *если ..., то*, но иногда также слова *когда ..., тогда* (*когда число делится на 6, тогда оно делится на 3*); *то, что ..., влечет* (*то, что число делится на 6, влечет то, что оно делится на 3*) и другие. В то же время слова *если ..., то* могут иметь смысл знака конъюнкции $\wedge$ (например, в высказывании *Если в планиметрии изучают плоские геометрические фигуры, то в стереометрии изучают трехмерные геометрические тела*), а слову *или* может соответствовать по смыслу не только знак дизъюнкции $\vee$, но и знак строгой дизъюнкции $\leftrightarrow$ (*n — четное число или n — нечетное число*).

Рассмотрим на примере, каким образом осуществляется такой перевод. Для того чтобы сложное высказывание *Он молчит, а Варенька поет ему «Виют витры» или глядит на него задумчиво своими темными глазами, или вдруг зальется: «Ха-ха-ха!»* (Чехов) перевести на язык логики высказываний, требуется решить ряд вопросов.

Во-первых, нужно выявить все элементарные высказывания, которые входят в состав данного сложного, и различным элементарным высказываниям поставить в соответствие различные пропозициональные переменные. Будем в данном случае считать элементарными высказывания *Он молчит*; *Варенька поет ему «Виют витры»*; (*Варенька*) *глядит на него задумчиво своими темными глазами*; (*Варенька*) *вдруг зальется*: *«Ха-ха-ха!»*. Поставим этим высказываниям в соответствие пропозициональные переменные p, q, r, s.

Во-вторых, нужно определить логические постоянные, с помощью которых построено данное сложное высказывание. Союз *а* имеет здесь, очевидно, тот же смысл, какой имеет союз *и*, поэтому переведем его знаком конъюнкции $\wedge$. Первое *или* можно перевести знаком дизъюнкции $\vee$, так как песня грустная и, повидимому, можно одновременно петь ее и глядеть задумчиво. Второе *или* скорее всего имеет смысл строгой дизъюнкции, так как исключается возможность одновременно смеяться и петь или задумчиво глядеть.

И наконец, в-третьих, анализируя порядок, в котором данное сложное высказывание строится из элементарных, нужно написать соответствующую ему формулу. Таким образом, в результате нашего, в известной степени произвольного, анализа текста мы можем, в конце концов, написать формулу

$$(p \wedge ((q \vee r) \nleftrightarrow s)).$$

Осуществив настоящий перевод с естественного языка на язык логики высказываний, мы достигли того, что избавились от всей информации, которая не относится к логике, выявили логическую структуру сложного высказывания, сделали ее недвусмысленной и доступной прямому наблюдению.

Упражнения:

I. Перевести на язык логики высказываний следующие предложения:

1. Андрей идет в кино только в том случае, когда там показывают комедию.

2. Для того чтобы n было нечетным, достаточно, чтобы n было простым.

3. Если в следующее воскресенье не будет дождя и я буду здоров, то я пойду в лес и буду собирать грибы.

4. Параллелограмм является квадратом, если и только если он прямоугольник и все его стороны равны.

5. Если Петр любит ходить в гости, то Павел домосед;

6. Если кто из товарищей опаздывал на молебен, или доходили слухи, о какой-нибудь проказе гимназистов, или видели классную даму поздно вечером с офицером, то он очень волновался и все говорил, как бы чего не вышло (Чехов).

7. Если я долго не приезжал в город, то значит, я был болен или что-нибудь случилось со мной, и они оба сильно беспокоились (Чехов).

II. Перевести на язык логики высказываний предостережение, которое было сделано одной из жительниц древних Афин своему честолюбивому сыну, собиравшемуся прославиться с помощью ораторского искусства, и ответ сына.

1. Если ты будешь говорить правду, то тебя возненавидят богатые и знатные. Если ты будешь лгать, то тебя возненавидит простой народ. Но ты должен или говорить правду, или лгать. Значит, тебя возненавидят богатые и знатные или тебя возненавидит простой народ.

2. Если я буду говорить правду, то меня прославит простой народ. Если я буду лгать, то меня прославят богатые и знатные. Но я должен говорить правду или лгать. Значит, меня прославит простой народ или прославят богатые и знатные.

§ 4. Таблицы формул логики высказываний

Зная логические значения элементарных высказываний, мы можем с помощью одних только таблиц для соответствующих логических союзов устанавливать логическое значение построенного из них сложного высказывания.

Пусть даны элементарные высказывания *Я устал*, *Я хочу спать* и *Я могу заниматься*, и пусть известно, что первое и третье из них истинны, а второе ложно. Что при этих условиях можно сказать о логическом значении сложного высказывания *Если я устал или я хочу спать, то я не могу заниматься?*

Поставим элементарным высказываниям в соответствие пропозициональные переменные p, q и r. Высказыванию *Я устал или я хочу спать* отвечает формула $(p \vee q)$. Ищем в таблице для дизъюнкции строку, в которой p — истинно, а q — ложно, и находим, что при этих условиях формула $(p \vee q)$ и соответствующее ей высказывание истинны. Поскольку интересующему нас сложному высказыванию отвечает формула

$$((p \vee q) \rightarrow \sim r),$$

в которой антецедент имеет значение «истина», а консеквент — «ложь», то с помощью таблицы для импликации можно установить, что эта формула и все сложное высказывание имеют логическое значение «ложь».

Вообще, если каждой пропозициональной переменной некоторой формулы придать определенное логическое значение, то с помощью таблиц можно определить, какое логическое значение получает в этом случае вся формула.

Пусть, например,

$$(((p \rightarrow q) \vee r) \leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \rightarrow \sim \sim r))$$

формула и пусть переменные p, q и r принимают соответственно логические значения «ложь», «истина» и «ложь». С помощью таблиц для логических знаков вычисляем последовательно логические значения подформул, данной формулы: $(p \rightarrow q)$ — «истина», $((p \rightarrow q) \vee r)$ — «истина», $\sim q$ — «ложь», $(p \wedge \sim q)$ — «ложь», $\sim r$ — «истина», $\sim \sim r$ — «ложь», $((p \wedge \sim q) \rightarrow \sim \sim r)$ — «истина», и, наконец, находим, что вся формула имеет логическое значение «истина».

Вычисление логического значения формулы по заданным логическим значениям ее переменных удобно проводить следующим образом. Выпишем формулу в одну строку и под пропозициональными переменными напишем их логические значения. Затем в соответствии с шагами построения формулы под каждым логическим знаком выписываем логическое значение подформулы, в которой этот знак является главным. Логическое значение формулы будет написано под ее главным логическим знаком. Например, для рассмотренной выше формулы получаем запись:

$$(((p \rightarrow q) \vee r) \leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \rightarrow \sim \sim r))$$

л и и и л и л л л и и л и л.

По каждой формуле логики высказываний всегда можно построить отвечающую ей таблицу, в которой зафиксировано, какие логические значения будет получать данная формула при различных наборах логических значений своих переменных. Таблицу формулы мы будем строить следующим образом.

Составляем список пропозициональных переменных, входящих в данную формулу. Переменные в этом списке должны быть выписаны без повторений. Затем, для каждой переменной строим соответствующий ей **входной** (**начальный**) столбец таблицы. В каждой строке построенных таким образом входных столбцов выписываем некоторый отличный от остальных набор логических значений для всех пропозициональных переменных. Если n — число входных столбцов, то число строк, содержащих все различные наборы логических значений n переменных, равно 2^n.

Далее, в последовательности, определяемой порядком построения данной формулы из ее подформул, для каждой подформулы, которая отлична от переменной, строим соответствующий ей столбец таблицы. Последний столбец, который называют **заключительным** (**выходным**), соответствует данной формуле. Заполнение этих столбцов логическими значениями осуществляется на основе приведенных выше таблиц для логических знаков $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\nleftrightarrow$.

Построим, например, таблицу для формулы

$$(p \wedge ((q \vee r) \nleftrightarrow s)).$$

Так как список пропозициональных переменных этой формулы содержит четыре переменные p, q, r, s, то таблица имеет четыре входных столбца и 16 строк. Остальные три столбца соответствуют всем подформулам данной формулы, отличным от переменных, причем последний является заключительным столбцом. Строки в этих столбцах заполнены на основании таблиц для логических знаков $\vee$, $\nleftrightarrow$ и $\wedge$. В результате имеем следующую таблицу.

p	q	r	s	$(q \vee r)$	$((q \vee r) \nleftrightarrow s)$	$(p \wedge ((q \vee r) \nleftrightarrow s))$
и	и	и	и	и	л	л
л	и	и	и	и	л	л
и	л	и	и	и	л	л
л	л	и	и	и	л	л
и	и	л	и	и	л	л
л	и	л	и	и	л	л
и	л	л	и	л	и	и
л	л	л	и	л	и	л
и	и	и	л	и	и	и
л	и	и	л	и	и	л
и	л	и	л	и	и	и
л	л	и	л	и	и	л
и	и	л	л	и	и	и
л	и	л	л	и	и	л
и	л	л	л	л	л	л
л	л	л	л	л	л	л

Из таблицы видно, что приведенная формула истинна для четырех наборов логических значений своих переменных и ложна для двенадцати остальных. Она отражает логическую структуру множества конкретных высказываний и, в частности, логическую структуру сложного высказывания *Он молчит, а Варенька поет ему «Виют витры», или глядит на него задумчиво своими темными глазами, или вдруг зальется: «Ха-ха-ха!»*. Из шестнадцати возможных (мыслимых) предметных ситуаций, по-разному определяющих логическое значение четырех элементарных высказываний, которые входят в его состав, лишь следующие четыре удовлетворяют условиям, налагаемым на них данным сложным высказыванием: 1) ситуация, при которой он молчит, Варенька смеется, не поет и не глядит задумчиво — этой ситуации отвечает седьмая строка таблицы, в которой p и s — истинны, а q и r — ложны; 2) ситуация, при которой он молчит, Варенька поет, задумчиво глядит и не смеется, — этой ситуации отвечает девятая строка таблицы, в которой p, q и r — истинны, а s — ложно; 3) ситуация, при которой он молчит, Варенька глядит задумчиво, не поет и не смеется, — этой ситуации отвечает одиннадцатая строка таблицы, в которой p и r — истинны, а q и s — ложны; и, наконец, 4) ситуация, при которой он опять-таки молчит, Варенька поет, но не глядит задумчиво и не смеется, — этой ситуации отвечает тринадцатая строка таблицы, в которой p и q — истинны, а r и s — ложны. Данная интерпретация условий истинности сложного высказывания хорошо согласуется с обычным пониманием его смысла.

Процедуру составления таблицы можно упростить, заменив ее процедурой выписывания под всеми подформулами данной формулы их логических значений.

Напишем формулу в одну строку и под первыми вхождениями каждой из пропозициональных переменных, выпишем столбец ее логических значений таким образом, чтобы были представлены все возможные наборы логических значений пропозициональных переменных данной формулы. Затем под каждым из остающихся вхождений некоторой переменной выпишем тот же столбец, который выписан под ее первым вхождением. Далее, шаг за шагом под каждым логическим знаком выписываем столбец логических значений той подформулы, для которой данный логический знак является главным.

Например:

$$(((p \vee q) \leftrightarrow \sim q) \dot{\rightarrow} (\sim r \rightarrow \sim p))$$

p	$\vee$	q	$\leftrightarrow$	$\sim$	q	$\dot{\rightarrow}$	$\sim$	r	$\rightarrow$	$\sim$	p
и	и	и	л	л	и	и	л	и	и	л	и
л	и	и	л	л	и	и	л	и	и	и	л
и	и	л	и	и	л	и	л	и	и	л	и
л	л	л	л	и	л	и	л	и	и	и	л
и	и	и	л	л	и	и	и	л	л	л	и
л	и	и	л	л	и	и	и	л	и	и	л
и	и	л	и	и	л	л	и	л	л	л	и
л	л	л	л	и	л	и	и	л	и	и	л

В дальнейшем нам понадобится, однако, более общее понятие таблицы данной формулы. Если до сих пор в таблице формулы **А** мы строили входные столбцы только для тех пропозициональных переменных, которые имеются в формуле **А**, то теперь мы будем строить для **А** таблицы с такими перечнями пропозициональных переменных, в которых содержатся все пропозициональные переменные **А**, а возможно, и еще какие-то другие. Таблицу в этом новом смысле мы будем называть *обобщенной* таблицей данной формулы.

Определение. Таблица формулы **А** есть таблица с перечнем пропозициональных переменных $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$, если: а) переменные выписаны в этом перечне без повторений; б) перечень содержит все пропозициональные переменные, входящие в **А** и в нем могут содержаться (не обязательно) пропозициональные переменные, не входящие в **А**; в) имеется n входных столбцов, по одному для каждой переменной перечня.

Например, для формулы

$$((p \leftrightarrow r) \wedge \sim p)$$

можно построить следующую таблицу с перечнем пропозициональных переменных $p,\ q,\ r$:

p	q	r	$(p \leftrightarrow r)$	$\sim p$	$((p \leftrightarrow r) \wedge \sim p)$
и	и	и	и	л	л
л	и	и	л	и	л
и	л	и	и	л	л
л	л	и	л	и	л
и	и	л	л	л	л
л	и	л	и	и	и
и	л	л	л	л	л
л	л	л	и	и	и

Ясно, что для каждой формулы **А** можно построить неограниченно много таблиц с разными перечнями пропозициональных переменных. Но только одна из них, а именно та таблица, в которой нет пропозициональных переменных, не входящих в **А**, будет минимальной.

Легко понять, что таблица формулы с некоторым перечнем переменных содержит (в качестве подтаблиц) таблицы всех своих подформул, с тем же перечнем переменных. Так, таблицу подформулы

$$(q \vee r)$$

формулы

$$(p \wedge ((q \vee r) \leftrightarrow s))$$

образуют первый, второй, третий, четвертый и пятый столбцы таблицы на с. 216. Если рассматривать эти пять столбцов в качестве самостоятельной таблицы формулы $(q \vee r)$ с перечнем переменных p, q, r и s, то при желании ее можно минимизировать, вычеркнув столбцы для переменных p и s и устранив образовавшиеся в результате вычеркивания повторяющиеся строки.

Упражнения:

I. Построить минимальные таблицы истинности для следующих формул:

1. $(((\sim q \rightarrow p) \vee q) \leftrightarrow p)$;
2. $(((p \vee q) \nleftrightarrow r) \rightarrow (\sim q \rightarrow r))$;
3. $(r \rightarrow ((q \vee s) \wedge \sim r))$.

II. Построить таблицы истинности с перечнем переменных p, q и r для следующих формул:

1. $((p \wedge \sim p) \vee p)$;
2. $(((p \vee q) \rightarrow \sim p) \wedge \sim p)$;
3. $((p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \nleftrightarrow r))$.

III. При каких логических значениях переменных следующие формулы получают значение «ложь»:

1. $((p \vee q) \rightarrow ((\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)))$;
2. $(((p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim r) \nleftrightarrow ((\sim p \vee r) \rightarrow q))$;
3. $((((\sim p \nleftrightarrow q) \rightarrow \sim r) \vee s) \wedge \sim t)$.

IV. Выписать столбцы логических значений под всеми подформулами следующих формул:

1. $(((p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)) \wedge (p \leftrightarrow \sim r))$;
2. $((((p \leftrightarrow r) \vee q) \wedge \sim p) \rightarrow (p \wedge \sim q))$;
3. $(((p \leftrightarrow \sim r) \rightarrow q) \rightarrow ((p \leftrightarrow r) \wedge \sim r))$.

§ 5. Равносильные формулы

Иногда различные по своей структуре формулы таковы, что одинаковым наборам логических значений переменных во входных столбцах таблиц этих формул отвечают одинаковые логические значения в соответствующих строках заключительных столбцов.

Например, в таблицах формул $(p \rightarrow \sim q)$ и $\sim (p \vee q)$

p	q	$\sim q$	$(p \rightarrow \sim q)$
и	и	л	л
л	и	л	и
и	л	и	и
л	л	и	и

p	q	$(p \wedge q)$	$\sim (p \wedge q)$
и	и	и	л
л	и	л	и
и	л	л	и
л	л	л	и

одинаковым набором логических знаний переменных p и q во входных столбцах отвечают одинаковые логические значения в соответствующих строках заключительных столбцов. О подобных формулах говорят, что они равносильны.

Определение. Пусть **A** и **B** — формулы, $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$ список всех пропозициональных переменных, входящих по крайней мере в одну из них. Будем говорить, что **A** и **B** — равносильные формулы (и писать: **A** равносильно **B**), если при любых логических значениях $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$ логические значения **A** и **B** совпадают.

Равносильными, следовательно, могут быть не только такие формулы, в которые входят одни и те же пропозициональные переменные, но и такие, в которые входят разные переменные. Рассмотрим, например, формулы

$$(\sim p \wedge (p \to q)) \quad \text{и} \quad (p \to (\sim p \wedge r)).$$

Построим для каждой из них таблицу с перечнем переменных p, q, r, т. е. с перечнем всех переменных, входящих по крайней мере в одну из этих формул:

p	q	r	$\sim p$	$(p \to q)$	$(\sim p \wedge (p \to q))$
и	и	и	л	и	л
л	и	и	и	и	и
и	л	и	л	л	л
л	л	и	и	и	и
и	и	л	л	и	л
л	и	л	и	и	и
и	л	л	л	л	л
л	л	л	и	и	и

p	q	r	$\sim p$	$(\sim p \wedge r)$	$(p \to (\sim p \wedge r))$
и	и	и	л	л	л
л	и	и	и	и	и
и	л	и	л	л	л
л	л	и	и	и	и
и	и	л	л	л	л
л	и	л	и	л	и
и	л	л	л	л	л
л	л	л	и	л	и

Из таблиц видно, что данные формулы равносильны.

Говорят, что логические значения формулы **A** не зависят от пропозициональной переменной $\mathbf{E}_i$, если для любого набора логических значений остальных пропозициональных переменных в таблице формулы **A** логическое значение **A** одно и то же, когда $\mathbf{E}_i$ истинно и когда $\mathbf{E}_i$ ложно. Видно, что логические значения обеих формул не зависят ни от переменной r, ни от переменной q.

Отношение равносильности, во-первых, рефлексивно, т. е. **A** равносильно **A**; во-вторых, симметрично, т. е. если **A** равносильно **B**, то **B** равносильно **A**, и, в-третьих, транзитивно, т. е. если **A** равносильно **B** и **B** равносильно **C**, то **A** равносильно **C**.

Два высказывания называются равнозначными, если они могут быть получены из равносильных формул **A** и **B** в результате замены всех входящих в них переменных конкретными высказываниями.

Например, высказывание *Если студент плохо знает предмет, то он не сдаст экзамен* равнозначно высказыванию *Неверно, что студент плохо знает предмет и он сдаст экзамен*, так как их можно получить из формул $(p \rightarrow \sim q)$ и $\sim (p \wedge q)$, придавая переменным p и q значения *Студент плохо знает предмет* и *Он сдаст экзамен*.

Рассмотрим некоторые равносильные формулы, условившись в дальнейшем во всех формулах для упрощения записи опускать внешние скобки.

Пусть **A** любая формула, тогда

$$\sim\sim \mathbf{A} \quad \text{равносильно} \quad \mathbf{A}. \tag{1}$$

Эта равносильность означает, что двойное отрицание любой формулы равносильно самой этой формуле: формула $\sim\sim \mathbf{A}$ истинна, когда истинна формула **A**, и ложна, когда **A** ложна. В этом легко убедиться, построив таблицу, во входном столбце которой выписаны логические значения формулы **A**, а в заключительном — формулы $\sim\sim \mathbf{A}$.

A	$\sim$**A**	$\sim\sim$**A**
и	л	и
л	и	л

Равносильность всех приводимых ниже схем формул также может быть обоснована построением соответствующих таблиц. Таблицы для схем формул строятся аналогично таблицам для формул, с той лишь разницей, что везде вместо пропозициональных переменных p, q, r, s, ... стоят буквы **A**, **B**, **C**, **D**, ... Фактическое построение таких таблиц предоставляется читателю.

Пусть **A**, **B**, **C** любые формулы, тогда

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad \mathbf{B} \wedge \mathbf{A}; \tag{2}$$

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \quad \text{равносильно} \quad (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}. \tag{3}$$

Равносильности (2) и (3) свидетельствуют о коммутативности и ассоциативности конъюнкции. Учитывая равносильность

(3), условимся в дальнейшем употреблять бесскобочную запись $A \wedge B \wedge C$.

Равносильности

$$A \vee B \text{ равносильно } B \vee A; \tag{4}$$

$$A \vee (B \vee C) \text{ равносильно } (A \vee B) \vee C \tag{5}$$

свидетельствуют о коммутативности и ассоциативности дизъюнкции. Учитывая (5), условимся в дальнейшем употреблять бесскобочную запись $A \vee B \vee C$.

Следующие равносильности:

$$A \vee (B \wedge C) \text{ равносильно } (A \vee B) \wedge (A \vee C); \tag{6}$$

$$(B \wedge C) \vee A \text{ равносильно } (A \vee B) \wedge (A \vee C); \tag{6'}$$

$$A \wedge (B \vee C) \text{ равносильно } (A \wedge B) \vee (A \wedge C); \tag{7}$$

$$(B \vee C) \wedge A \text{ равносильно } (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \tag{7'}$$

свидетельствуют о дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции и дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции.

Проиллюстрируем равносильность (7). Высказывание о погоде за какой-то период *Стояли морозные дни, и в то же время был сильный снегопад или дул резкий ветер*, которое имеет вид $A \wedge (B \vee C)$, равнозначно высказыванию *Стояли морозные дни, и был сильный снегопад, или же стояли морозные дни, и дул резкий ветер*, которое имеет вид $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Следующие две равносильности:

$$A \wedge A \text{ равносильно } A; \tag{8}$$

$$A \vee A \text{ равносильно } A \tag{9}$$

называются законами идемпотентности конъюнкции и дизъюнкции.

Равносильности

$$\sim (A \wedge B) \text{ равносильно } \sim A \vee \sim B; \tag{10}$$

$$\sim (A \vee B) \text{ равносильно } \sim A \wedge \sim B \tag{11}$$

называются законами де Моргана.

Примером (10) является равнозначность высказывания *Неверно, что данный треугольник прямоугольный и что он в то же время равнобедренный* высказыванию *Или этот треугольник не прямоугольный, или он не равнобедренный.* Заметим, что так как дизъюнкция здесь не исключающая, то может быть, что этот треугольник и не прямоугольный, и не равнобедренный.

Примером (11) может служить равнозначность высказывания *Неверно, что или он изучал логику в школе, или он прослушал курс логики в вузе* высказыванию *Он не изучал логику в школе и он не слушал курса логики в вузе.*

Рассмотрим еще ряд равносильностей.

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad \sim(\mathbf{A} \rightarrow \sim \mathbf{B}) \qquad (12)$$

Например, высказывание *Летом он поедет в Ленинград и посетит «Эрмитаж»* равнозначно высказыванию *Неверно, что если летом он поедет в Ленинград, то не посетит «Эрмитаж».*

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad \sim \mathbf{A} \vee \mathbf{B}. \qquad (13)$$

Например, высказывание *Если взялся за дело, то доведи его до конца* равнозначно высказыванию *Или не берись за дело, или доведи его до конца.*

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad \sim(\sim \mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B}). \qquad (14)$$

Например, высказывание *У квадрата стороны равны и углы прямые* равнозначно высказыванию *Неверно, что у квадрата стороны не равны или углы не прямые.*

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad \sim(\sim \mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B}). \qquad (15)$$

Например, высказывание *Данный треугольник или равносторонний или равнобедренный* равнозначно высказыванию *Неверно, что данный треугольник не равносторонний и не равнобедренный.*

Нам понадобятся в дальнейшем также равносильности

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad (\sim \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\sim \mathbf{B} \vee \mathbf{A}); \qquad (16)$$

$$\mathbf{A} \not\leftrightarrow \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\sim \mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B}); \qquad (17)$$

$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\sim \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \quad \text{равносильно} \quad \mathbf{B}; \qquad (18)$$

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \quad \text{равносильно} \quad \mathbf{A}; \qquad (19)$$

$$\mathbf{A} \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \quad \text{равносильно} \quad \mathbf{A}; \qquad (20)$$

$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{B} \vee \sim \mathbf{C}) \quad \text{равносильно} \quad (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{B} \vee \sim \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}); \qquad (21)$$

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \vee (\mathbf{B} \wedge \sim \mathbf{C}) \quad \text{равносильно} \quad (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \vee (\mathbf{B} \wedge \sim \mathbf{C}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}). \qquad (22)$$

Равносильность (18) называется законом исключения, равносильности (19) и (20) — законами поглощения, а равносильности (21) и (22) — законами выявления.

Каждое из соотношений (1)—(22) содержит схемы формул и относится к бесконечному множеству равносильных друг другу формул логики высказываний соответствующего вида.

Например, равносильность (13) относится к следующим парам конкретных формул:

$p \rightarrow q$ и $\sim p \vee q$; $\quad \sim p \rightarrow \sim q$ и $\sim \sim p \vee \sim q$;

$p \rightarrow p$ и $\sim p \vee p$; $\quad \sim q \rightarrow \sim q$ и $\sim \sim q \vee \sim q$;

$(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \vee \sim s)$ и $\sim(\sim p \wedge q) \vee (r \vee \sim s)$;

$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s$ и $\sim((p \rightarrow q) \rightarrow r) \vee s$ и т. д.

Упражнения.

I. Установить частным случаем какой из равносильностей (1)—(22) являются следующие пары формул:

1. $(p \to q) \wedge (\sim r \vee s)$ и $((p \to q) \wedge \sim r) \vee ((p \to q) \wedge s)$;
2. $(p \vee (q \leftrightarrow r)) \wedge (\sim q \vee \sim(p \leftrightarrow r))$
и $(p \vee (q \leftrightarrow r)) \wedge (\sim q \vee \sim (p \leftrightarrow r)) \wedge (p \vee \sim q)$;
3. $\sim p \vee (q \wedge r)$ и $p \to (q \wedge r)$;
4. $(\sim p \wedge \sim q)$ и $\sim(\sim \sim p \vee \sim \sim q)$;
5. $p \vee q \vee r$ и $\sim (p \vee q) \to r$;
6. $p \vee q \vee (r \wedge s)$ и $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee s)$;
7. $(p \wedge (q \vee r)) \wedge s$ и $\sim ((p \wedge (q \vee r)) \to \sim s)$;
8. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ и $p \wedge (q \vee \sim q)$.

II. С помощью таблиц обосновать следующие равносильности:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad \sim \mathbf{B} \to \sim \mathbf{A}; \tag{23}$$

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad \sim \mathbf{A} \leftrightarrow \sim \mathbf{B}; \tag{24}$$

$$\mathbf{A} \not\leftrightarrow \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad \sim (\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}); \tag{25}$$

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{A}); \tag{26}$$

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\sim \mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B}). \tag{27}$$

III. Проверить, являются ли равносильными следующие формулы:

1. $\sim p \vee q$ и $p \to \sim q$;
2. $p \to (q \to r)$ и $(p \wedge q) \to r$;
3. $\sim ((p \wedge q) \vee r)$ и $(p \to \sim q) \wedge \sim r$;
4. $\sim p \to (q \to r)$ и $q \to (\sim p \to r)$;
5. $p \wedge q$ и $q \wedge r$;
6. $p \to q$ и $r \to s$;
7. $p \to q$ и $\sim p \vee q$;
8. $\sim (p \wedge q)$ и $\sim r \vee \sim s$.

§ 6. Правило равносильной замены

Используя транзитивность отношения равносильности мы, зная о равносильности одних формул, можем судить о равносильности других. Например согласно (13) формула

$$p \to q \tag{а}$$

равносильна формуле

$$\sim p \vee q. \tag{б}$$

Последняя же согласно (15) равносильна формуле

$$\sim (\sim \sim p \wedge \sim q). \tag{в}$$

В силу транзитивности отношения равносильности отсюда следует, что формулы (а) и (в) равносильны.

Поскольку же формула (в) согласно (10) равносильна формуле

$$\sim\sim\sim p \vee \sim\sim q, \tag{г}$$

устанавливаем, что формулы (а) и (г) также равносильны.

Аналогичным образом, используя транзитивность и симметричность отношения равносильности, на основании соотношений (1), (19), (14), можно установить, например, равносильность формул p и $\sim p \rightarrow (\sim\sim p \wedge q)$ и т. п.

Далее, подобно тому как в элементарной алгебре заменой «равного равным» осуществляют тождественные преобразования алгебраических выражений, в логике также пользуются правилом замены, позволяющим осуществлять равносильные преобразования и от одних формул переходить к другим, равносильным им формулам. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{A_B}$ *обозначает формулу* $\mathbf{A}$ *с выделенным вхождением подформулы* $\mathbf{B}$, а $\mathbf{A_{B'}}$ *формулу, которая получается из* $\mathbf{A}$ *заменой выделенного вхождения* $\mathbf{B}$ *в* $\mathbf{A}$ *на формулу* $\mathbf{B'}$. *Тогда, если* $\mathbf{B}$ *равносильно* $\mathbf{B'}$, *то* $\mathbf{A_B}$ *равносильно* $\mathbf{A_{B'}}$.

Доказательство. Докажем это утверждение методом математической индукции. Для формулы $\mathbf{A_B}$ построим ее таблицу $\mathbf{T}$ с перечнем пропозициональных переменных $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots$ $\ldots, \mathbf{E}_n$, содержащим все переменные формул $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B'}$, а для формулы $\mathbf{A_{B'}}$ — ее таблицу $\mathbf{T'}$ с таким же перечнем пропозициональных переменных.

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{A_B}$ — пропозициональная переменная. В этом случае $\mathbf{A_B}$ совпадает с $\mathbf{B}$, а $\mathbf{A_{B'}}$ — с $\mathbf{B'}$. Поэтому очевидно, что $\mathbf{A_B}$ равносильно $\mathbf{A_{B'}}$.

Рассмотрим, далее, случаи, когда $\mathbf{A_B}$ не является пропозициональной переменной.

Случай 1. Пусть главным логическим знаком формулы $\mathbf{A_B}$ является $\sim$. Тогда $\mathbf{A_B}$ имеет вид $\sim \mathbf{C_B}$, а $\mathbf{A_{B'}}$ имеет вид $\sim \mathbf{C_{B'}}$. Предположим, что теорема верна для формулы $\mathbf{C_B}$, т. е. $\mathbf{C_B}$ равносильно $\mathbf{C_{B'}}$. Построим для формул $\mathbf{C_B}$ и $\mathbf{C_{B'}}$ соответственно таблицу $\mathbf{T}_1$ с перечнями пропозициональных переменных $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_n$ и таблицу $\mathbf{T}_1'$ с тем же перечнем переменных. Можно видеть, что таблица $\mathbf{T}_1$ содержится в таблице $\mathbf{T}$, а таблица $\mathbf{T}_1'$ в таблице $\mathbf{T'}$. Так как по индуктивному предположению $\mathbf{C_B}$ равносильно $\mathbf{C_{B'}}$, заключительные столбцы логических значений в $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_1'$ совпадают. На основании таблицы для $\sim$ заключаем, что в этом случае совпадают и заключительные столбцы таблиц $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T'}$. Отсюда следует, что $\sim \mathbf{C_B}$ равносильно $\sim \mathbf{C_{B'}}$, т. е. $\mathbf{A_B}$ равносильно $\mathbf{A_{B'}}$.

Случай 2. Пусть главным логическим знаком формулы $\mathbf{A_B}$ является $\wedge$. Тогда $\mathbf{A_B}$ можно представить в одном из следующих видов:

a) $\mathbf{C_B} \wedge \mathbf{D}$; b) $\mathbf{C} \wedge \mathbf{D_B}$, так как выделенное вхождение подформулы **B** может содержаться только в одном из конъюнктов.

Рассмотрим подслучай a). Предположим, что теорема верна для формулы $\mathbf{C}_{\mathbf{B}}$, т. е. $\mathbf{C}_{\mathbf{B}}$ равносильно $\mathbf{C}_{\mathbf{B}'}$. Построим для формул $\mathbf{C}_{\mathbf{B}}$, $\mathbf{C}_{\mathbf{B}'}$ и **D** соответственно таблицы $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}'_1$ и $\mathbf{T}_2$, каждую с перечнем пропозициональных переменных $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$. Можно видеть, что $\mathbf{T}_1$ содержится в **T**, $\mathbf{T}'_1$ — в $\mathbf{T}'$, а $\mathbf{T}_2$ в **T** и $\mathbf{T}'$. Так как по индуктивному предположению $\mathbf{C}_{\mathbf{B}}$ равносильно $\mathbf{C}_{\mathbf{B}'}$. заключительные столбцы логических значений в $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}'_1$ совпадают. Но тогда на основании таблицы для $\wedge$ заключительные столбцы логических значений для $\mathbf{C}_{\mathbf{B}} \wedge \mathbf{D}$ в **T** и для $\mathbf{C}_{\mathbf{B}'} \wedge \mathbf{D}$ в $\mathbf{T}'$ тоже совпадают. Отсюда следует, что $\mathbf{C}_{\mathbf{B}} \wedge \mathbf{D}$ равносильно $\mathbf{C}_{\mathbf{B}'} \wedge \mathbf{D}$, т. е. $\mathbf{A}_{\mathbf{B}}$ равносильно $\mathbf{A}_{\mathbf{B}'}$.

Подслучай b) рассматривается аналогично.

В остальных четырех случаях, когда $\mathbf{A}_{\mathbf{B}}$ содержит в качестве главного логического знака $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ и $\not\leftrightarrow$ доказательство того, что если **B** равносильно $\mathbf{B}'$, то $\mathbf{A}_{\mathbf{B}}$ равносильно $\mathbf{A}_{\mathbf{B}'}$, протекает сходным образом на основании таблиц для соответствующих логических знаков.

Правило, разрешающее в формуле **A** выделенное вхождение подформулы **B** заменять равносильной формулой $\mathbf{B}'$, называется *правилом равносильной замены*.

Это правило позволяет, опираясь на равносильность одних формул (**B** и $\mathbf{B}'$), устанавливать равносильность других (**A** и $\mathbf{A}'$). Равносильности (1)—(22) были обоснованы с помощью таблиц. Теперь с помощью этих равносильностей, пользуясь правилом замены, мы можем устанавливать равносильность формул уже без обращения к таблицам.

Пусть, например, дана формула

$$\sim(p \wedge q) \rightarrow r. \tag{а}$$

Заменяем, согласно равносильности (10) подформулу этой формулы $\sim(p \wedge q)$ равносильной ей формулой $(\sim p \vee \sim q)$. В результате получаем формулу

$$(\sim p \vee \sim q) \rightarrow r. \tag{б}$$

Далее, так как каждая формула рассматривается в качестве подформулы самой себя, то заменяем согласно равносильности (13) формулу (б) формулой

$$\sim(\sim p \vee \sim q) \vee r. \tag{в}$$

Затем, подформулу этой формулы $\sim(\sim p \vee \sim q)$ заменяем согласно равносильности (11) формулой $(\sim\sim p \wedge \sim\sim q)$ и получаем формулу

$$(\sim\sim p \wedge \sim\sim q) \vee r. \tag{г}$$

Заменив теперь согласно равносильности (1) подформулу $\sim\sim p$ и подформулу $\sim\sim q$ соответственно формулами p и q, получаем формулу

$$(p \wedge q) \vee r. \tag{д}$$

Согласно правилу замены формула (а) равносильна формуле (б); формула (б) — формуле (в); формула (в) — формуле (г) и формула (г) — формуле (д), откуда в силу транзитивности отношения равносильности следует, что формула (а) равносильна формуле (g).

Упражнения:

I. Пользуясь одним только свойством транзитивности отношения равносильности с помощью (1)—(22), доказать равносильность следующих формул:

1. $p \wedge (q \vee r)$ и $\sim(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)$;
2. $\sim(p \vee q)$ и $\sim(\sim p \rightarrow \sim\sim q)$;
3. $\sim p \rightarrow (q \wedge r)$ и $(\sim\sim p \vee q) \wedge (\sim\sim p \vee r)$;
4. $(\sim\sim q \vee \sim p) \wedge (\sim\sim p \vee \sim q)$ и $\sim\sim(\sim q \leftrightarrow \sim p)$;
5. $\sim(p \rightarrow \sim q)$ и $\sim(\sim p \vee \sim q)$;
6. $p \leftrightarrow q$ и $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

II. Используя (1)—(27) и правило замены, доказать следующие равносильности:

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad \sim\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}; \tag{28}$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad \sim(\mathbf{A} \wedge \sim\mathbf{B}); \tag{29}$$

$$\sim(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \quad \text{равносильно} \quad (\mathbf{A} \wedge \sim\mathbf{B}); \tag{30}$$

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad \sim(\sim\mathbf{A} \not\leftrightarrow \sim\mathbf{B}); \tag{31}$$

$$\mathbf{A} \not\leftrightarrow \mathbf{B} \quad \text{равносильно} \quad \sim(\sim\mathbf{A} \leftrightarrow \sim\mathbf{B}); \tag{32}$$

$$\sim(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \quad \text{равносильно} \quad (\sim\mathbf{A} \not\leftrightarrow \sim\mathbf{B}); \tag{33}$$

$$\sim(\mathbf{A} \not\leftrightarrow \mathbf{B}) \quad \text{равносильно} \quad (\sim\mathbf{A} \leftrightarrow \sim\mathbf{B}). \tag{34}$$

III. Используя равносильности (1)—(34), с помощью правила замены доказать равносильность следующих формул:

1. $(p \vee q) \wedge (p \vee p)$ и $p \wedge (q \vee p)$;
2. $\sim(\sim p \rightarrow \sim q)$ и $\sim p \wedge q$;
3. $p \rightarrow \sim q$ и $q \rightarrow \sim p$;
4. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow q$ и $p \rightarrow q$;
5. $\sim(p \leftrightarrow q)$ и $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$;
6. $\sim(p \not\leftrightarrow q)$ и $p \leftrightarrow q$;
7. $p \not\leftrightarrow q$ и $\sim p \not\leftrightarrow \sim q$.

§ 7. Полные системы логических знаков

С помощью правила замены мы можем преобразовать формулу таким образом, чтобы она не содержала некоторого логического знака. Например, если дана формула

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \vee s),$$

то, применив к ее подформуле $(p \rightarrow q)$ правило замены по равносильности (13), получим формулу

$$(\sim p \vee q) \wedge (r \vee s),$$

которая равносильна данной, но уже не содержит знака $\rightarrow$.

Так как формулы имеют конечную длину, то каждый из логических знаков может входить в них лишь конечное число раз. Поэтому конечным числом применений правила замены с помощью равносильностей (13), (16) и (17) любую формулу можно преобразовать таким образом, чтобы она не содержала логических знаков, отличных от $\sim$, $\wedge$ и $\vee$. Из полученной формулы также в конечное число шагов с помощью равносильности (14) можно получить формулу, не содержащую знаков, отличных от $\sim$ и $\vee$, а затем из нее с помощью равносильности (15) можно получить формулу, не содержащую знаков, отличных от $\sim$ и $\wedge$. Наконец, из этой формулы с помощью равносильности (12) можно получить формулу, не содержащую знаков, отличных от $\sim$ и $\rightarrow$.

Рассмотрим в качестве примера преобразование формулы

$$(p \leftrightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \tag{а}$$

в формулу, которая равносильна ей, но не содержит знаков, отличных от $\sim$ и $\wedge$. Применяя к подформуле $(p \leftrightarrow q)$ формулы (а) правило замены по равносильности (16), получаем формулу

$$((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)) \vee (q \rightarrow r). \tag{б}$$

Затем к подформуле $(q \rightarrow r)$ формулы (б) применяем правило замены по равносильности (13) и получаем формулу

$$((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)) \vee (\sim q \vee r). \tag{в}$$

Теперь к подформулам $(\sim p \vee q)$, $(\sim q \vee p)$ и $(\sim q \vee r)$ формулы (в) применяем правило замены по равносильности (15) и получаем формулу

$$(\sim (\sim \sim p \wedge \sim q) \wedge \sim (\sim \sim q \wedge \sim p)) \vee \sim (\sim \sim q \wedge \sim r). \tag{г}$$

Формула (г), согласно той же равносильности (15), может быть заменена формулой

$$\sim (\sim (\sim (\sim \sim p \wedge \sim q) \wedge \sim (\sim \sim q \wedge \sim p)) \wedge \sim \sim (\sim \sim q \wedge \sim r)), \tag{д}$$

которая равносильна (а) и не содержит знаков, отличных от $\sim$ и $\wedge$. Применив к формуле (д) четыре раза правило замены по равносильности (1), мы можем получить более простую формулу

$$\sim (\sim (\sim (p \wedge \sim q) \wedge \sim (q \wedge \sim p)) \wedge (q \wedge \sim r)). \tag{е}$$

Однако не любой набор логических знаков позволяет выразить через него все остальные. Не любую формулу, например, можно преобразовать в равносильную ей и содержащую одни лишь знаки $\sim$ и $\leftrightarrow$, или одни лишь знаки $\wedge$ и $\vee$, или одни лишь знаки $\wedge$, $\vee$ и $\rightarrow$.

Так, с помощью $\sim$ и $\leftrightarrow$ нельзя построить формулу, равносильную формуле $p \rightarrow q$, а с помощью $\wedge$, $\vee$ и $\rightarrow$ — формулу, равносильную формуле $\sim p$.

В языке логики высказываний имеется, как мы знаем, шесть логических союзов, из которых один — знак отрицания $\sim$ — унарный, т. е. относящийся к одной формуле, и пять — $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\not\leftrightarrow$ — бинарные, т. е. относящиеся к двум формулам. Возникает вопрос, существуют ли еще какие нибудь логические союзы, смысл которых может быть уточнен с помощью таблиц, заполненных логическими значениями «истина» и «ложь»? Исходя из общих соображений относительно семантики логических знаков, можно предположить существование следующих четырех унарных логических союзов:

A	$-_1$A	$-_2$A	$-_3$A	$-_4$A
и	и	и	л	л
л	и	л	и	л

Но знаки $-_1$ и $-_4$ не используются в качестве логических союзов, так как логические значения выражений $-_1$**A** и $-_4$**A** в заключительном столбце таблицы не зависят от значений во входном, а логические значения выражения $-_2$**A** в заключительном столбце лишь повторяют значения во входном. И только знак $-_3$ есть знак отрицания $\sim$.

Из тех же общих соображений относительно семантики логических знаков можно предположить существование следующих шестнадцати бинарных логических союзов:

A	B	A∇_1B	A∇_2B	A∇_3B	A∇_4B	A∇_5B	A∇_6B	A∇_7B	A∇_8B	A∇_9B	A∇_{10}B	A∇_{11}B	A∇_{12}B	A∇_{13}B	A∇_{14}B	A∇_{15}B	A∇_{16}B
и	и	и	и	и	и	л	и	и	л	л	л	и	и	л	л	л	л
л	и	и	и	и	л	и	и	л	л	и	и	л	л	и	л	л	л
и	л	и	и	л	и	и	л	л	и	л	и	и	л	л	и	л	л
л	л	и	л	и	и	и	л	и	и	и	л	л	л	л	л	и	л

Знаки ∇_1 и ∇_{16} не используются в качестве логических союзов, так как логические значения выражений **A**∇_1**B** и **A**∇_{16}**B** не зависят от значений **A** и **B** во входных столбцах, знаки ∇_6

и ∇_{11} не используются в качестве логических постоянных, так как выражения $\mathbf{A}\nabla_6\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}\nabla_{11}\mathbf{B}$ не зависят соответственно от **A** и **B** и равносильны соответственно **B** и **A**; знаки ∇_8 и ∇_9 не используются в качестве логических союзов, так как выражения $\mathbf{A}\nabla_8\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}\nabla_9\mathbf{B}$ не зависят соответственно от **A** и **B** и равносильны $\sim\mathbf{B}$ и $\sim\mathbf{A}$. Остальные десять бинарных логических знаков используются в качестве логических союзов. Знаки ∇_2, ∇_3, ∇_7, ∇_{10} и ∇_{12} — суть логические знаки $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\not\leftrightarrow$ и $\wedge$ нашего языка. Знаки ∇_4, ∇_5, ∇_{13}, ∇_{14} и ∇_{15} используются в качестве логических союзов, но их нет в нашем языке. Они называются соответственно знаками обратной импликации (обознач. $\leftarrow$), антиконъюнкции (обознач. $\uparrow$), обратной антиимпликации (обознач. $\not\leftarrow$), антиимпликации (обознач. $\not\rightarrow$) и антидизъюнкции (обознач. $\downarrow$). Если ввести эти знаки в алфавит языка и добавить соответствующие пункты к определению формулы, то формулы $(\mathbf{A}\leftarrow\mathbf{B})$, $(\mathbf{A}\uparrow\mathbf{B})$, $(\mathbf{A}\not\leftarrow\mathbf{B})$, $(\mathbf{A}\not\rightarrow\mathbf{B})$ и $(\mathbf{A}\downarrow\mathbf{B})$ будут читаться соответственно: **A**, *если* **B**; **A** *несовместно с* **B**; *не* **A**, *но* **B**; **A**, *но не* **B** и *ни* **A**, *ни* **B**.

С помощью таблиц легко проверить, что для формул расширенного языка будут иметь место следующие равносильности:

$\mathbf{A}\leftarrow\mathbf{B}$	равносильно	$\sim\mathbf{B}\vee\mathbf{A}$;	(35)
$\mathbf{A}\uparrow\mathbf{B}$	равносильно	$\sim\mathbf{A}\vee\sim\mathbf{B}$;	(36)
$\mathbf{A}\not\leftarrow\mathbf{B}$	равносильно	$\sim(\sim\mathbf{B}\vee\mathbf{A})$;	(37)
$\mathbf{A}\not\rightarrow\mathbf{B}$	равносильно	$\sim(\sim\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$;	(38)
$\mathbf{A}\downarrow\mathbf{B}$	равносильно	$\sim(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$;	(39)
$\sim\mathbf{A}$	равносильно	$\mathbf{A}\uparrow\mathbf{A}$;	(40)
$\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$	равносильно	$(\mathbf{A}\uparrow\mathbf{A})\uparrow(\mathbf{B}\uparrow\mathbf{B})$.	(41)

Равносильности (13), (16), (17), (14) и (35)—(39) свидетельствуют о том, что из любой формулы языка, расширенного знаками $\leftarrow$, $\uparrow$, $\not\leftarrow$, $\not\rightarrow$ и $\downarrow$, конечным числом применений правила замены можно получить формулу, не содержащую знаков, отличных от знаков $\sim$ и $\vee$. Но так как равносильности (40) и (41) позволяют $\sim$ и $\vee$ выразить через антиконъюнкцию $\uparrow$, то ясно, что любая формула логического языка, содержащего отрицание и все десять бинарных логических знаков, может быть преобразована в равносильную ей формулу, которая не содержит логических знаков, отличных от $\uparrow$.

Наряду с унарными и бинарными логическими знаками можно вводить логические знаки для различных тернарных и вообще n-арных логических союзов. Из общего числа 256 возможных таблиц для тернарных логических союзов лишь с некоторыми связывают логический знак. Используют, например, тернарный логический союз, который называется условной дизъюнкцией, обозначается знаком $\frown$ и характеризуется следующей таблицей:

A	**B**	**C**	$\mathbf{A}\overset{\frown}{\mathbf{B}}\mathbf{C}$
и	и	и	и
л	и	и	л
и	л	и	и
л	л	и	и
и	и	л	и
л	и	л	л
и	л	л	л
л	л	л	л

Имеет место равносильность:

$$\mathbf{A}\overset{\frown}{\mathbf{B}}\mathbf{C} \text{ равносильно } (\mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}), \qquad (42)$$

согласно которой условная дизъюнкция выразима через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

Можно показать, что из какого бы набора унарных, бинарных, тернарных, ..., n-арных логических знаков не была построена формула **A**, существует формула **B**, которая равносильна **A** и не содержит знаков, отличных от $\sim$, $\wedge$ и $\vee$.

Так как каждому набору логических значений пропозициональных переменных $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$ в таблице формулы **A** однозначно соответствует логическое значение, зафиксированное в заключительном столбце, то говорят, что формула **A** определяет логическую функцию $\mathbf{F}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n)$. Эта функция может быть задана таблицей, которая получается из таблицы формулы **A** вычеркиванием всех столбцов, кроме входных и заключительного. $\mathbf{F}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n)$ — двузначная функция, так как пропозициональные переменные и сама функция принимают только два значения «истина» и «ложь».

Например, формула

$$p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$$

определяет логическую функцию $F(p, q, r)$, которая может быть задана также следующей таблицей с перечнем пропозициональных переменных p, q, r:

p	q	r	$\mathbf{F}(p, q, r)$
и	и	и	и
л	и	и	и
и	л	и	л
л	л	и	и
и	и	л	л
л	и	л	и
и	л	л	и
л	л	л	и

Две равносильные формулы определяют, таким образом, одну и ту же логическую функцию. При условии, что аргументы и функция получают два значения — «истина» и «ложь» — можно построить 2^{2^n} двузначных логических функций n аргументов.

Теорема. *Любая логическая функция определяется формулой, содержащей только знаки* $\sim$; $\wedge$ *и* $\vee$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n)$ — функция, заданная таблицей $\mathbf{T}$. В каждой строке $\mathbf{T}$ зафиксирован набор логических значений пропозициональных переменных $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ..., $\mathbf{E}_n$ и соответствующее ему логическое значение $\mathbf{F}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n)$. Занумеруем строки таблицы $\mathbf{T}$ сверху вниз числами $1, 2, \ldots, 2^n$.

Пусть формула $\mathbf{B}_i$, где $i \leqslant 2^n$, есть конъюнкция

$$\mathbf{C}_1^i \wedge \mathbf{C}_2^i \wedge \ldots \wedge \mathbf{C}_n^i,$$

причем $\mathbf{C}_j^i$, где $(j \leqslant n)$, есть $\mathbf{E}_j$, если в i-й строке $\mathbf{T}$ $\mathbf{E}_j$ имеет логическое значение «истина», и $\mathbf{C}_j^i$ есть $\sim\mathbf{E}_j$, если в i-й строке $\mathbf{T}$ $\mathbf{E}_j$ имеет логическое значение «ложь». Пусть, далее, формула $\mathbf{D}$ есть дизъюнкция всех таких $\mathbf{B}_i$, которые в i-й строке заключительного столбца таблицы $\mathbf{T}$ имеют логическое значение «истина».

Если таких строк в $\mathbf{T}$ нет и в заключительном столбце все строки имеют логическое значение «ложь», то функцию $\mathbf{F}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n)$, заданную $\mathbf{T}$, определяет формула $\mathbf{E}_1 \wedge \sim \mathbf{E}_1$. Действительно, в заключительном столбце построенной по формуле $\mathbf{E}_1 \wedge \sim\mathbf{E}_1$ таблицы с перечнем пропозициональных переменных $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ..., $\mathbf{E}_n$, все строки имеют логическое значение «ложь».

Если же такие строки в $\mathbf{T}$ есть, то заданную таблицей $\mathbf{T}$ функцию $\mathbf{F}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n)$ определяет формула $\mathbf{D}$. Действительно, пусть имеется какой-нибудь набор логических значений переменных $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ..., $\mathbf{E}_n$ и пусть в $\mathbf{T}$ подобный набор логических значений переменных представлен в k-й строке. При данном наборе $\mathbf{B}_k$ имеет логическое значение «истина», тогда как все остальные $\mathbf{B}_i$ имеют при этом наборе логическое значение «ложь». Если для k-й строки $\mathbf{T}$ имеет в заключительном столбце логическое значение «истина», то $\mathbf{B}_k$ является дизъюнктом $\mathbf{D}$ и, следовательно, при этом наборе $\mathbf{D}$ тоже имеет значение «истина». Если для k-й строки $\mathbf{T}$ имеет в заключительном столбце значение «ложь», то $\mathbf{B}_k$ не является дизъюнктом $\mathbf{D}$ и для рассматриваемого набора логических значений все дизъюнкты $\mathbf{D}$ принимают значение «ложь», а следовательно, и вся формула $\mathbf{D}$ принимает значение «ложь». Таким образом, формула $\mathbf{D}$ определяет функцию $\mathbf{F}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n)$.

Пусть, например, дана таблица функции $\mathbf{F}(p, q, r)$.

p	q	r	$\mathbf{F}(p, q, r)$
и	и	и	л
л	и	и	и
и	л	и	и
л	л	и	л
и	и	л	л
л	и	л	и
и	л	л	л
л	л	л	и

Эта функция определяется формулой

$$(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r).$$

Из теоремы, в частности, следует, что какова бы ни была формула **A** и ее таблица **T** с перечнем пропозициональных переменных $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$, можно построить формулу, равносильную **A**, но не содержащую других логических знаков, кроме $\sim$, $\wedge$ и $\vee$.

Имея в виду данную теорему говорят, что $\sim$, $\wedge$ и $\vee$ образуют полную систему логических знаков. Поскольку же, как мы выяснили выше, каждую формулу, содержащую логические знаки $\sim$, $\wedge$ и $\vee$, можно преобразовать в равносильную ей формулу, не содержащую знаков, отличных от $\sim$ и $\wedge$, то эта пара также образует полную систему логических знаков.

Аналогичным образом полную систему логических знаков образуют пары $\sim$ и $\vee$, $\sim$ и $\rightarrow$, $\rightarrow$ и $\nleftrightarrow$. Равносильности же (36) и (37) свидетельствуют о том, что знака $\uparrow$ достаточно для построения формулы, определяющей любую логическую функцию.

Упражнения:

1. Из формулы

$$(p \nleftrightarrow q) \rightarrow r$$

путем равносильных замен получить формулу:

1) не содержащую логических знаков, отличных от $\sim$ и $\wedge$;
2) не содержащую логических знаков, отличных от $\sim$ и $\vee$;
3) не содержащую логических знаков, отличных от $\sim$ и $\rightarrow$.

II. Найти формулу D, которая содержит только логические знаки $\sim$, $\wedge$ и $\vee$, и определяет следующую функцию:

p	q	r	$F(p, q, r)$
и	и	и	и
л	и	и	и
и	л	и	л
л	л	и	л
и	и	л	и
л	и	л	л
и	л	л	л
л	л	л	и

III. Показать, что знака $\downarrow$ достаточно для построения формулы, определяющей произвольную логическую функцию.

IV. Найти равносильности, которые свидетельствуют о том, что $\rightarrow$ и $\nleftrightarrow$ образуют полную систему логических знаков (выразить через них $\sim$ и $\vee$).

§ 8. Закон двойственности

Знаки $\wedge$ и $\vee$, а также знаки $\leftrightarrow$ и $\nleftrightarrow$ являются **двойственными логическими знаками.**

Определение. Пусть **A** формула, в которую не входит знак $\rightarrow$. Формулой, двойственной **A**, называют формулу **A***, которая получается из **A** заменой каждого вхождения знаков $\wedge$ и $\leftrightarrow$ соответственно двойственными им знаками $\vee$ и $\nleftrightarrow$ и заменой каждого вхождения знаков $\vee$ и $\nleftrightarrow$ в **A** соответственными им знаками $\wedge$ и $\leftrightarrow$.

Например, если **A** — формула

$$((p \vee \sim q) \nleftrightarrow r) \wedge \sim(\sim p \vee (r \leftrightarrow s)),$$

то двойственная ей формула **A*** будет иметь вид

$$((p \wedge \sim q) \leftrightarrow r) \vee \sim(\sim p \wedge (r \nleftrightarrow s)).$$

Ясно, что если формула **A*** двойственна формуле **A**, то и, наоборот, формула **A** двойственна формуле **A***.

Рассмотрим таблицы для конъюнкции и дизъюнкции. Можно видеть, что если в таблице для конъюнкции во всех трех столбцах для **A**, **B** и (**A** $\wedge$ **B**), все логические значения «истина» заменить логическими значениями «ложь», а все логические значения «ложь» — логическими значениями «истина», то получим таблицу формулы (**A** $\vee$ **B**). Если же в таблице формулы (**A** $\vee$ **B**) аналогичным образом во всех трех столбцах для **A**, **B** (**A** $\vee$ **B**) поменять все логические значения на противоположные, то получим таблицу формулы (**A** $\wedge$ **B**). Эти соотношения находят выражение в равносильностях (15) и (14).

То же самое имеет место в отношении таблиц для эквивалентности и строгой дизъюнкции: таблица формулы (**A** $\leftrightarrow$ **B**), переходит при взаимной замене логических значений во всех трех столбцах в таблицу формулы $(\mathbf{A} \nleftrightarrow \mathbf{B})$, а таблица формулы $(\mathbf{A} \nleftrightarrow \mathbf{B})$ — в таблицу формулы $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$. Эти соотношения находят выражение в равносильностях (32) и (31).

Можно видеть также, что таблица для отрицания при подобной замене переходит в саму себя. Отсюда непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— формула, не содержащая знака* $\rightarrow$, $\mathbf{A}^*$ *— двойственная ей формула*, а $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$ *— список всех входящих в эти формулы пропозициональных переменных. Пусть, далее,* $\mathbf{A}'$ *— формула, которая получается из* $\mathbf{A}$ *заменой всех вхождений переменных* $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$ *в формулу* $\mathbf{A}$ *соответственно их отрицаниями* $\sim\mathbf{E}_1, \sim\mathbf{E}_2, \ldots, \sim\mathbf{E}_n$. *Тогда* $\sim\mathbf{A}'$ *равносильно* $\mathbf{A}^*$.

Теорема (закон двойственности). *Если* $\mathbf{A}^*$ и $\mathbf{B}^*$ *— формулы, двойственные соответственно формулам* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *и если* $\mathbf{A}$ *равносильно* $\mathbf{B}$, *то* $\mathbf{A}^*$ *равносильно* $\mathbf{B}^*$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{B}'$ — формулы, которые получаются из не содержащих знака $\rightarrow$ формул $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ заменой всех переменных в $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно отрицаниями этих переменных. Тогда, если $\mathbf{A}$ равносильно $\mathbf{B}$, то $\mathbf{A}'$ равносильно $\mathbf{B}'$, так как согласно определению равносильности $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ принимают одинаковые логические значения при любых логических значениях общего списка своих переменных, а значит, и при любых логических значениях их отрицаний. Но если $\mathbf{A}'$ равносильно $\mathbf{B}'$, то $\sim\mathbf{A}'$ равносильно $\sim\mathbf{B}'$. А так как двойственная $\mathbf{A}$ формула $\mathbf{A}^*$ равносильна $\sim\mathbf{A}'$ и двойственная $\mathbf{B}$ формула $\mathbf{B}^*$ равносильна $\sim\mathbf{B}'$, то в силу транзитивности отношения равносильности $\mathbf{A}^*$ равносильно $\mathbf{B}^*$.

Формула $\mathbf{A}$ называется самодвойственной, если $\mathbf{A}$ равносильно $\mathbf{A}^*$. Например, самодвойственной является формула

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r).$$

Формула $\mathbf{A}$ называется несамодвойственной, если в ее таблице имеются хотя бы два набора логических значений переменных, получающихся друг из друга заменой каждого логического значения на противоположное, для которых $\mathbf{A}$ получает в заключительном столбце одно и то же логическое значение.

Упражиеиия:

I. Построить, если возможно, формулы, двойственные следующим:

1. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow ((q \nleftrightarrow r) \wedge (p \vee r))$;
2. $(((p \wedge q) \vee r) \wedge s) \leftrightarrow (((p \vee q) \wedge r) \vee s)$;
3. $\sim((p \nleftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \nleftrightarrow \sim q))$.

II. Используя равносильности (10), (11), (33) и (34), обосновать следующее соотношение: $\sim\mathbf{A}^*$ равносильио $\mathbf{A}'$, где $\mathbf{A}^*$ и $\mathbf{A}'$ означают то же, что иа с. 234—235.

III. Установить, какие из следующих логических знаков, $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\nrightarrow$, $\nleftarrow$, $\uparrow$ и $\downarrow$ образуют двойственные пары.

§ 9. Тождественно-истинные и тождественно-ложные формулы

До сих пор мы имели дело с формулами, которые при одних логических значениях своих переменных были истинными, а при других — ложными. Но существуют формулы, которые при любых наборах логических значений переменных получают в заключительном столбце таблицы логическое значение «истина». Такие формулы называют **тождественно-истинными** формулами или **логическими тождествами**.

Рассмотрим, например, формулу

$$p \to p$$

и построим ее таблицу:

p	$p \to p$
и	и
л	и

Мы видим, что независимо от того, принимает пропозициональная переменная p значение «истина» или «ложь», формула $p \to p$ имеет значение «истина». Так, высказывания *Если Ленинград большой город, то Ленинград большой город*; *Если сегодня пасмурный день, то сегодня пасмурный день* и *Если 12 простое число, то 12 простое число* — истинны независимо от того истинно или ложно фактически, что Ленинград большой город и сегодня пасмурный день, и является ли действительно 12 простым числом.

Построим теперь для формулы

$$p \vee \sim p$$

ее таблицу:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
и	л	и
л	и	и

Мы видим, что независимо от того, принимает переменная p значения «истина» или «ложь», формула $p \vee \sim p$ имеет значение «истина». Например, высказывания *Волга впадает в Каспийское море или Волга не впадает в Каспийское море*; *12 делится на 5 без остатка, или неверно, что 12 делится на 5 без остатка* — истинны независимо от того, впадает Волга в Каспийское море и делится ли 12 на 5 без остатка.

Каждая тождественно-истинная формула выражает какой-то логический закон. Формула $p \to p$ есть известный логический закон тождества, а формула $p \vee \sim p$ — закон исключенного третьего (закон исключенного среднего)

Рассмотрим еще два примера тождественно-истинных формул. Формула

$$p \to (q \to p)$$

имеет таблицу:

p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$
и	и	и	и
л	и	л	и
и	л	и	и
л	л	и	и

а формула

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$$

(закон гипотетического силлогизма) — таблицу:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$(p \to r)$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
и	и	и	и	и	и	и	и
л	и	и	и	и	и	и	и
и	л	и	л	и	л	и	и
л	л	и	и	и	и	и	и
и	и	л	и	л	л	л	и
л	и	л	и	л	л	и	и
и	л	л	л	и	л	л	и
л	л	л	и	и	и	и	и

Таким образом, существуют формулы, которые истинны при любых логических значениях своих переменных. Ясно, что все тождественно-истинные формулы равносильны друг другу. Поскольку соответствующие этим формулам сложные высказывания истинны при любом конкретном содержании и независимо от фактической истинности элементарных высказываний, из которых они состоят, говорят, что они являются аналитически или логически истинными высказываниями. Тождественно-истинные формулы и соответствующие конкретные высказывания всегда истинны потому, что в их логической структуре (логической форме) отражаются объективные связи, которые носят общий и закономерный характер.

Существуют также формулы, которые при любых наборах логических значений переменных получают в заключительном столбце своей таблицы логическое значение «ложь». Они называются **тождественно-ложными** (**противоречивыми**) формулами.

Рассмотрим, например, формулу

$$p \wedge \sim p,$$

которая имеет таблицу:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
и	л	л
л	и	л

Так, высказывания *Ленинград расположен в дельте Невы и неверно, что Ленинград расположен в дельте Невы*; *Этот лист бумаги белый и неверно, что этот лист бумаги белый*; *2 — простое число и неверно, что 2 — простое число* — ложны независимо от того, где расположен Ленинград, каков цвет данного листа бумаги и считается ли 2 простым числом.

Рассмотрим далее формулы

$$p \leftrightarrow \sim p \quad \text{и} \quad \sim p \wedge \sim(\sim p \vee q),$$

которые имеют таблицы:

p	$\sim p$	$p \leftrightarrow \sim p$
и	л	л
л	и	л

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim(\sim p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim(\sim p \vee q)$
и	и	л	и	л	л
л	и	и	и	л	л
и	л	л	л	и	л
л	л	и	и	л	л

Например, высказывания *Он умеет играть в шахматы, если и только если неверно, что он умеет играть в шахматы* и *Неверно, что это число четное и неверно, что это число не является четным или оно делится на 3* — ложны независимо от того, умеет тот, о ком идет речь, играть в шахматы и делится ли данное число на 2 и на 3.

Ясно, что все тождественно-ложные формулы равносильны друг другу. Отрицание тождественно-истинной формулы есть тождественно-ложная формула, и наоборот. Так, если формулы

$p \vee \sim p$ и $\sim (p \wedge \sim p)$ тождественно-истинны, то формулы $\sim (p \vee \sim p)$ и $\sim \sim (p \wedge \sim p)$ тождественно-ложны.

Если теперь мы обозначим заглавной буквой **И** формулу, которая тождественно-истинна, а заглавной буквой **Л** формулу, которая тождественно-ложна, то будут иметь место следующие равносильности:

$$\sim \mathbf{И} \text{ равносильно } \mathbf{Л}; \quad (43)$$

$$\sim \mathbf{Л} \text{ равносильно } \mathbf{И}; \quad (44)$$

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{И} \text{ равносильно } \mathbf{A}; \quad (45)$$

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{Л} \text{ равносильно } \sim \mathbf{A}; \quad (46)$$

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{И} \text{ равносильно } \mathbf{A}; \quad (47)$$

$$\mathbf{И} \wedge \mathbf{A} \text{ равносильно } \mathbf{A}; \quad (47')$$

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{Л} \text{ равносильно } \mathbf{Л}; \quad (48)$$

$$\mathbf{Л} \wedge \mathbf{A} \text{ равносильно } \mathbf{Л}; \quad (48')$$

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{И} \text{ равносильно } \mathbf{И}; \quad (49)$$

$$\mathbf{И} \vee \mathbf{A} \text{ равносильно } \mathbf{И}; \quad (49')$$

$$\mathbf{Л} \vee \mathbf{A} \text{ равносильно } \mathbf{A}; \quad (50)$$

$$\mathbf{Л} \vee \mathbf{A} \text{ равносильно } \mathbf{A}. \quad (50')$$

Ясно, что если формула **A** тождественно-истинна (тождественно-ложна), то любая ее таблица с любым перечнем пропозициональных переменных $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$ во всех строках заключительного столбца будет иметь значение «истина» («ложь»).

Знание о том, что какие-то формулы тождественно-истинны, позволяет судить о тождественной истинности других формул. Например, можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Если формулы* $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ *и* $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ *тождественно-истинны, то тождественно-истинна формула* $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$ перечень всех пропозициональных переменных, входящих в **A**, **B** и **C**. Построим таблицы формул $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ и $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ с данным перечнем переменных. Предположим теперь, что формула $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ не тождественно-истинна и при некотором наборе логических значений переменных $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$ получает в заключительном столбце своей таблицы логическое значение «ложь». Ясно, что при данных значениях переменных формула **A** — истинна, а формула **C** — ложна. Но тогда, если при этом же наборе логических значений переменных формула **B** истинна, то ложна формула $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$, а если формула **B** ложна, то ложна формула $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. Одно и другое противоречит условиям теоремы, и, следовательно, формула $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ тождественно-истинна.

Докажем, наконец, следующую теорему.

Теорема. **A** *равносильно* **B** *тогда и только тогда, когда формула* $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ *тождественно-истинна.*

Доказательство. Пусть A равносильно B. Тогда, если при некотором наборе логических значений переменных E_1, E_2, ..., E_n (где E_1, E_2, ..., E_n — совокупность всех переменных, входящих в A и B) формула A истинна, то формула B тоже истинна. Но в этом случае согласно таблице для эквивалентности истинна и формула $A \leftrightarrow B$. Если же при некотором наборе логических значений E_1, E_2, ..., E_n формула A ложна, то B тоже ложна и согласно таблице для эквивалентности формула $A \leftrightarrow B$ истинна.

Обратно, пусть формула $A \leftrightarrow B$ тождественно-истинна. Тогда согласно равносильности (26) тождественно-истинны формулы $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$. Если при некотором наборе логических значений E_1, E_2, ..., E_n формула A истинна, то согласно таблице для эквивалентности формула B не может быть ложной, так как в этом случае была ложна формула $A \rightarrow B$. Если же при некотором наборе логических значений переменных формула A ложна, то формула B не может быть истинной, так как в этом случае была бы ложна формула $B \rightarrow A$. Таким образом, A равносильно B.

Упражнения:

I. Установить, какой из следующих четырех формул: A, $\sim A$, И или Л равносильны формулы:

1. $A \rightarrow$ И.
2. $A \rightarrow$ Л.
3. И $\rightarrow A$.
4. Л $\rightarrow A$.
5. $A \nleftrightarrow$ И.
6. $A \nleftrightarrow$ Л.

II. Доказать, что

1) если тождественно-истинны формулы A и $A \rightarrow B$, то тождественно-истинна формула B;

2) если тождественно-истинны формулы $A \rightarrow B$ и $A \rightarrow \sim B$, то тождественно-истинна формула $\sim A$;

3) если тождественно-истинны формулы $A \vee B$, $A \rightarrow C$, $B \rightarrow D$, то тождественно-истинна формула $C \vee D$.

III. Построить такую формулу A, чтобы

1) формула

$$(p \rightarrow (A \rightarrow \sim q)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee A)$$

была тождественно-истинной;

2) формула

$$((\sim r \vee (p \wedge \sim q)) \rightarrow A) \wedge \sim (r \wedge ((\sim q \rightarrow \sim p) \wedge A))$$

была тождественно-ложной.

Глава II

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ФОРМУЛ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 10. Нормальная форма

Определение: формула логики высказываний имеет нормальную форму, если она: а) не содержит знаков $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ и $\not\leftrightarrow$ и б) знаки отрицания стоят в ней только при переменных.

Например, формула

$$((p \vee \sim q) \wedge r) \vee (((\sim r \vee s) \wedge (\sim p \vee s \vee r)) \wedge (s \vee q))$$

имеет нормальную форму, а формула

$$(\sim (p \vee q) \wedge \sim r) \vee (\sim q \vee s)$$

— не имеет.

Любую формулу **A**, не имеющую нормальной формы, можно конечным числом применений правила замены преобразовать в формулу **A′**, которая имеет нормальную форму. Процесс такого преобразования будем называть процессом приведения формулы к нормальной форме.

Для того чтобы данную формулу привести к нормальной форме, необходимо произвести в ней следующие равносильные замены:

1) каждую подформулу вида $(\mathbf{A} \not\leftrightarrow \mathbf{B})$ заменить согласно равносильности (17) формулой $((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\sim \mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B}))$;

2) каждую подформулу вида $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$ заменить согласно равносильности (16) формулой $((\sim \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\sim \mathbf{B} \vee \mathbf{A}))$;

3) каждую подформулу вида $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ заменить согласно равносильности (13) формулой $(\sim \mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;

4) каждую подформулу вида $\sim (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ заменить согласно равносильности (10) формулой $(\sim \mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B})$;

5) каждую подформулу вида $\sim (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$ заменить согласно равносильности (11) формулой $(\sim \mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B})$;

6) каждую подформулу вида $\sim \sim \mathbf{A}$ заменить согласно равносильности (1) формулой **A**.

Формула имеет нормальную форму, если ни один из перечисленных пп. 1)—6) настоящего предписания к ней не применим.

Пусть, например, дана формула

$$(\sim p \not\leftrightarrow q) \rightarrow ((q \leftrightarrow r) \vee s).$$

Согласно равносильности (17) получаем формулу

$$((\sim p \vee q) \wedge (\sim \sim p \vee \sim q)) \rightarrow ((q \leftrightarrow r) \vee s).$$

Из нее согласно равносильности (16) получаем формулу

$$((\sim p \vee q) \wedge (\sim \sim p \vee \sim q)) \rightarrow (((\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \vee s),$$

затем согласно равносильности (13) — формулу

$$\sim ((\sim p \vee q) \wedge (\sim \sim p \vee \sim q)) \vee (((\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \vee s)$$

и, далее согласно равносильности (10) — формулу

$$(\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim \sim p \vee \sim q)) \vee (((\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \vee s),$$

после чего, дважды применяя правило замены, согласно равносильности (11) — формулу

$$((\sim \sim p \wedge \sim q) \vee (\sim \sim \sim p \wedge \sim \sim q)) \vee (((\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \vee s).$$

Наконец, трижды применяя правило замены, согласно равносильности (1) получаем следующую формулу в нормальной форме:

$$((p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)) \vee (((\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \vee s),$$

которую, пользуясь соглашением о бесскобочной записи кратной дизъюнкции, можно записать

$$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \vee ((\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \vee s.$$

Упражнение:

Привести к нормальной форме формулы:

1. $\sim (p \leftrightarrow \sim q)$;
2. $(\sim p \not\leftrightarrow q) \rightarrow r$;
3. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow ((p \leftrightarrow r) \rightarrow (q \leftrightarrow r))$.

§ 11. Проблема разрешения

Итак, каждая формула логики высказываний принадлежит одному из следующих трех классов: 1) истинных при любых логических значениях своих переменных (тождественно-истинные формулы); 2) ложных при любых логических значениях своих переменных (тождественно-ложные формулы), 3) истинных при одних логических значениях своих переменных и ложных при других (нейтральные формулы).

Формула логики высказываний называется *выполнимой формулой*, если хотя бы для одного набора логических значений своих переменных она получает значение «истина». Таким образом, тождественно-истинные и нейтральные формулы выполнимые, а тождественно-ложные невыполнимые.

Задача, состоящая в отыскании процедуры, позволяющей для любой формулы выяснить, какому из трех перечисленных выше классов она принадлежит, называется *семантической проблемой разрешения* для формул логики высказываний. В соответствии с этим процедура, позволяющая конечным числом простых действий решить проблему разрешения, называется **разрешающей процедурой**. Ясно, что процесс построения по данной формуле отвечающей ей таблицы есть разрешающая процедура семантической проблемы разрешения для формул логики высказываний.

Однако использовать процесс построения таблицы в качестве разрешающей процедуры семантической проблемы разрешения практически удобно лишь в тех случаях, когда в формулу входит небольшое число переменных и она не очень длинная. Следует учитывать, что число строк в таблице быстро растет с увеличением числа входящих в формулу переменных. Например, при трех переменных число строк равно 8, при шести —64, а при десяти — уже 1024. Стремясь избежать построения громоздких таблиц, ищут другие, более удобные, разрешающие процедуры.

Заметим, что для того чтобы получить разрешающую процедуру, достаточно найти способ, позволяющий отличить тождественно-истинные формулы от всех остальных. В самом деле, если в результате применения такой процедуры к формуле **А** выясняется, что она тождественно-истинна, то проблема разрешения решена. Если же выясняется, что она не тождественно-истинна, то данную процедуру нужно применить к формуле $\sim$ **А**. Если в результате ее применения к $\sim$ **А**, выяснится, что $\sim$ **А** тождественно-истинная формула, то значит, формула **А** тождественно-ложна. Если же $\sim$ **А** так же как **А** не тождественно-истинна, — значит, формула **А** нейтральная, т. е. при одних значениях переменных она истинна, а при других ложна.

Ниже описана формальная процедура, с помощью которой для любой формулы логики высказываний, не прибегая к построению таблицы, можно решить вопрос, тождественно-истинна она или нет.

Будем говорить, что некоторая пропозициональная переменная входит в формулу, приведенную к нормальной форме, **регулярно**, если она входит в нее одновременно с отрицанием и без отрицания. Если переменная входит в формулу, приведенную к нормальной форме, только с отрицанием или только без отрицания, то будем говорить, что она входит в формулу **нерегулярно**.

Разрешающая процедура заключается в следующем:

1) приводим формулу к нормальной форме;

2) в формуле, приведенной к нормальной форме, выделяем переменные, которые входят в нее нерегулярно;

3) вместо всех нерегулярно входящих переменных и отрицаний нерегулярно входящих переменных подставляем на всех местах, где они встречаются в нормальной форме, букву **Л**, т. е. подставляем **Л** вместо переменной или вместо отрицания переменной;

4) применяем правило замены по равносильностям (48), (48′), (50) и (50′) ко всем подформулам получившейся формулы

до тех пор, пока остаются поводы для его применения. В результате длина формулы будет сокращаться и могут появиться новые нерегулярно входящие переменные. С ними поступаем таким же образом, т. е. согласно пп. 3) и 4) Предусмотренные в пп. 2)—4) преобразования повторяем до тех пор, пока не получим формулу, не содержащую нерегулярно входящих переменных;

5) рассматриваем следующие две формулы, которые получаются из формулы, не содержащей нерегулярно входящих переменных, если:

а) вместо одной из регулярно входящих переменных на всех местах подставить букву **И** и применить правило равносильной замены согласно равносильностям (43), (47)—(50);

б) вместо той же самой переменной на всех местах подставить букву **Л** и применить правило равносильной замены согласно равносильностям (44), (47)—(50).

К формулам а) и б), если это возможно, снова применяем пп. 2)—4), а затем согласно п. 5) из формул а) и б) получаем соответственно формулы аа), аб) и ба), бб) и т. д. до тех пор, пока не исчерпаем возможности применения пп. 2)—5).

Если в результате применения данной процедуры к произвольной формуле **A** все заключительные формулы будут **И**, то формула **A** тождественно-истинная, если же хотя бы одна заключительная формула есть **Л**, то формула **A** не тождественно-истинная.

Проиллюстрируем изложенное на следующих двух примерах.

1. Пусть дана формула, уже имеющая нормальную форму,

$$(p_1 \wedge (\sim p_2 \vee p_3 \vee (p_4 \wedge (p_5 \vee (p_6 \wedge \sim p_1 \wedge \sim p_7))))) \vee$$
$$\vee (((\sim p_6 \wedge ((p_8 \wedge p_9 \wedge \sim p_5) \vee (p_7 \wedge \sim p_8 \wedge \sim p_9))) \vee \sim p_1) \wedge$$
$$\wedge\, p_2 \wedge \sim p_3).$$

Тождественно-истинная она или нет?

Нерегулярно входящей в этой формуле является только переменная p_4. Подставляем вместо p_4 букву **Л** и, применив правило замены сначала по равносильности (48′), а затем по равносильности (50), получаем формулу

$$(p_1 \wedge (\sim p_2 \vee p_3)) \vee (((\sim p_6 \wedge ((p_8 \wedge p_9 \wedge \sim p_5) \vee$$
$$\vee (p_7 \wedge \sim p_8 \wedge \sim p_9))) \vee \sim p_1) \wedge p_2 \wedge \sim p_3).$$

Теперь появилась новая нерегулярно входящая переменная p_6. Подставляем вместо $\sim p_6$ букву **Л** и применив правило замены по равносильности (48′), а затем по равносильности (50′), получаем формулу

$$(p_1 \wedge (\sim p_2 \vee p_3)) \vee (\sim p_1 \wedge p_2 \wedge \sim p_3),$$

в которой уже нет нерегулярно входящих переменных.

В соответствии с п. 5) подставляем вместо p_1 буквы **И** и **Л** и рассматриваем получившиеся формулы:

$$\text{а)} \quad (\text{И} \wedge (\sim p_2 \vee p_3)) \vee (\sim \text{И} \wedge p_2 \wedge \sim p_3),$$

из которой согласно равносильностям (47′), (43), (48′) и (50) получаем формулу

$$\sim p_2 \vee p_3$$

и

$$\text{б)} \quad (\text{Л} \wedge (\sim p_2 \vee p_3)) \vee (\sim \text{Л} \wedge p_2 \wedge \sim p_3),$$

из которой согласно равносильностям (48′), (44), (47′) и (50′) получаем формулу

$$p_2 \wedge \sim p_3.$$

В формуле а) обе нерегулярно входящие переменные, после замены их буквой **Л**, дадут формулу **Л**. Этого достаточно, чтобы утверждать, что приведенная вначале формула не тождественно-истинная.

2. Пусть дана формула

$$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)).$$

Является ли она тождественно-истинной?

Приведем ее к нормальной форме:

$$\sim (\sim p \vee (\sim q \vee r)) \vee (\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r));$$
$$(\sim \sim p \wedge \sim (\sim q \vee r)) \vee ((\sim \sim p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee r);$$
$$(\sim \sim p \wedge \sim \sim q \wedge \sim r) \vee ((\sim \sim p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee r);$$
$$(p \wedge q \wedge \sim r) \vee ((p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee r).$$

Здесь нет нерегулярно входящих переменных, поэтому вместо регулярно входящей переменной p согласно п. 5) подставляем буквы **И** и **Л** и получаем формулы:

$$\text{а)} \quad (\text{И} \wedge q \wedge \sim r) \vee (\text{И} \wedge \sim q) \vee (\quad \text{И} \vee r);$$
$$(q \wedge \sim r) \vee (\sim q \vee r);$$
$$\text{б)} \quad (\text{Л} \wedge q \wedge \sim r) \vee (\text{Л} \wedge \sim q) \vee (\sim \text{Л} \vee r).$$

Сразу находим, что формула б) равносильна **И**. Формула же а) порождает согласно п. 5), формулы аа) и аб):

$$\text{аа)} \quad (\text{И} \wedge \sim r) \vee \sim \text{И} \vee r;$$
$$\sim r \vee r,$$

которая при любых подстановках дает **И** и

$$\text{аб)} \quad (\text{Л} \wedge \sim r) \vee \sim \text{Л} \vee r,$$

которая равносильна **И**.

Так как все заключительные формулы — **И**, то исходная формула тождественно-истинная.

Упражнение:

Применив разрешающую процедуру к следующим формулам, установить, являются они тождественно-истинными, тождественно-ложными или нейтральными:

1. $p \to (q \to (p \wedge q))$;
2. $p \wedge (\sim p \vee q)$;
3. $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim (p \to \sim q)$;
4. $\sim (p \to (p \vee q))$;
5. $(p \leftrightarrow q) \to ((q \leftrightarrow r) \to (p \leftrightarrow r))$;
6. $\sim ((p \to (q \not\leftrightarrow q)) \to (p \to r))$.

§ 12. Конъюнктивная нормальная форма и совершенная конъюнктивная нормальная форма

Возникает вопрос, можно ли установить какую-нибудь закономерную связь между структурой формулы и ее семантикой, между ее логической формой и логическим содержанием? Оказывается, что такая связь существует, и можно указать простой метод, позволяющий по виду формулы, приведенной к некоторой стандартной форме, судить о том, тождественно-истинная она или нет.

Условимся называть **элементарной дизъюнкцией** формулу, которая имеет вид

$$\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n,$$

где $n \geqslant 1$, а $\mathbf{A}_i$ $(i \leqslant n)$ есть либо переменная, либо отрицание переменной. Например, формула

$$p \vee q \vee \sim r \vee p \vee \sim q \vee r$$

— элементарная дизъюнкция, формула же

$$(p \wedge q) \vee r \vee p$$

элементарной дизъюнкцией не является, так как ее первый дизъюнктивный член не есть ни переменная, ни отрицание переменной.

Теорема. *Элементарная дизъюнкция тождественно-истинна тогда и только тогда, когда в ней содержится хотя бы одна пара дизъюнктивных членов, из которых один есть некоторая переменная, а другой — ее отрицание.*

Доказательство. В самом деле, элементарная дизъюнкция, содержащая такую пару, либо уже имеет вид

$$\mathbf{E} \vee \sim \mathbf{E} \vee \mathbf{D},$$

где $\mathbf{E}$ переменная, а $\mathbf{D}$ — элементарная дизъюнкция (которой может и не быть), либо ей можно придать этот вид в результате применения правила замены по равносильности (4). Так как подформула $\mathbf{E} \vee \sim \mathbf{E}$ тождественно-истинная, то согласно (49′) вся элементарная дизъюнкция

$$\mathbf{E} \vee \sim \mathbf{E} \vee \mathbf{D}$$

тождественно-истинная формула, независимо от того, истинна или ложна подформула $\mathbf{D}$.

Наличие переменной и ее отрицания не только достаточное, но и необходимое условие тождественной истинности элементарной дизъюнкции. Действительно, допустим, что в элементарной дизъюнкции такой пары нет. Придадим каждой переменной, не стоящей под знаком отрицания, значение «ложь», а каждой переменной, стоящей под знаком отрицания, значение «истина». Тогда каждый из дизъюнктивных членов получает значение «ложь», а, следовательно, вся элементарная дизъюнкция имеет значение «ложь» и не является тождественно-истинной формулой.

Определение. Формула логики высказываний имеет конъюнктивную нормальную форму (КНФ), если она имеет вид

$$\mathbf{B}_1 \wedge \mathbf{B}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{B}_m,$$

где $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, ..., $\mathbf{B}_m$ — элементарные дизъюнкции и $m \geqslant 1$. Например, формула

$$p \wedge (\sim q \vee r) \wedge \sim s \wedge (\sim p \vee \sim r)$$

имеет конъюнктивную нормальную форму.

Любая формула логики высказываний в результате ряда равносильных замен может быть приведена к конъюнктивной нормальной форме. Формулу, равносильную данной и имеющую конъюнктивную нормальную форму, будем называть **конъюнктивной нормальной формой данной формулы**.

Для того чтобы формулу привести к КНФ, необходимо вначале с помощью известной процедуры привести ее к нормальной форме. Затем каждую подформулу вида $(\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}))$ согласно равносильности (6) и каждую подформулу вида $((\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \vee \mathbf{A})$ согласно равносильности (6′) заменить формулой $((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}))$.

Формула имеет КНФ, если она имеет нормальную форму и в ней нет подформул вида $(\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}))$ и $((\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \vee \mathbf{A})$.

Рассмотрим процесс приведения формулы к КНФ на следующем примере. Пусть дана формула

$$(\sim p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow \sim r).$$

Приведем ее вначале к нормальной форме:

$$\sim(\sim p \wedge q) \vee (p \leftrightarrow \sim r);$$

$$\sim(\sim p \wedge q) \vee ((\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim \sim r \vee p));$$

$$(\sim \sim p \vee \sim q) \vee ((\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim \sim r \vee p));$$

$$(p \vee \sim q) \vee ((\sim p \vee \sim r) \wedge (r \vee p)).$$

Затем, с помощью равносильности (6) получаем формулу

$$(p \vee \sim q \vee \sim p \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q \vee r \vee p),$$

которая имеет КНФ.

Формула не единственным образом представима в КНФ. Например, формула

$$p \leftrightarrow q$$

имеет следующие представления в КНФ:

$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p);$$
$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p \vee r) \wedge (\sim q \vee p \vee \sim r);$$
$$(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim p).$$

Приводя формулу к КНФ, мы будем в дальнейшем пользоваться следующими сокращенными способами преобразования формул.

Так, если знак отрицания стоит перед конъюнкцией [дизъюнкцией], содержащей более двух конъюнктов [дизъюнктов], как, например, в формулах $\sim(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$ $[\sim(\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vee \mathbf{C})]$, $\sim(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$ $[\sim(\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vee \mathbf{C} \vee \mathbf{D})]$ и т. д., то мы не будем восстанавливать скобки и дважды, трижды и т. д. применять правило замены по равносильностям (10) [(11)], а сразу будем писать формулы $(\sim \mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B} \vee \sim \mathbf{C})$ $[(\sim \mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B} \wedge \sim \mathbf{C})]$, $(\sim \mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B} \wedge \sim \mathbf{C} \wedge \sim \mathbf{D})$ $[(\sim \mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B} \vee \sim \mathbf{C} \vee \sim \mathbf{D})]$ и т. д., т. е. пользоваться обобщенными законами де Моргана:

$\sim(\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_n)$ равносильно $\sim \mathbf{A}_1 \vee \sim \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \sim \mathbf{A}_n$;

$\sim(\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n)$ равносильно $\sim \mathbf{A}_1 \wedge \sim \mathbf{A}_2 \wedge \ldots \wedge \sim \mathbf{A}_n$.

Далее, если в формуле встречаются подформулы вида $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$, $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D} \wedge \mathbf{E})$ и т. п., то вместо того, чтобы дважды, трижды и т. д. применять правило замены по равносильности (6) и (6′) и писать, например, в первом случае сначала формулу

$$((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}) \wedge ((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee \mathbf{D}),$$

а затем

$$(\mathbf{C} \vee \mathbf{A}) \wedge (\mathbf{C} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{D} \vee \mathbf{A}) \wedge (\mathbf{D} \vee \mathbf{B}),$$

будем сразу писать последнюю формулу, т. е. пользоваться обобщенным законом дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции:

$(\mathbf{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_m) \vee (\mathbf{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{B}_n)$ равносильно $(\mathbf{B}_1 \vee \mathbf{A}_1) \wedge \ldots$
$\ldots \wedge (\mathbf{B}_1 \vee \mathbf{A}_m) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{B}_n \vee \mathbf{A}_1) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{B}_n \vee \mathbf{A}_m)$.

Кроме того, мы не будем писать перед подформулами двойных отрицаний, если последние появятся в ходе преобразований, так как согласно процедуре приведения формулы к КНФ все двойные отрицания должны быть устранены.

Формула, имеющая КНФ, тождественно-истинна тогда и только тогда, когда тождественно-истинны все ее конъюнктивные члены, т. е. когда каждая элементарная дизъюнкция содержит хотя бы одну пару дизъюнктов, из которых один есть некоторая переменная, а другой — ее отрицание.

Таким образом, по виду некоторой формулы в КНФ можно судить о том, тождественно-истинна она или нет.

Например, пусть дана формула

$$(p \to \sim q) \leftrightarrow (q \to \sim p).$$

Приводим ее к КНФ:

$$(\sim (p \to \sim q) \vee (q \to \sim p)) \wedge (\sim (q \to \sim p) \vee (p \to \sim q));$$

$$(\sim (\sim p \vee \sim q) \vee (\sim q \vee \sim p)) \wedge (\sim (\sim q \vee \sim p) \vee (\sim p \vee \sim q));$$

$$((p \wedge q) \vee (\sim q \vee \sim p)) \wedge ((q \wedge p) \vee (\sim p \vee \sim q));$$

$$(\sim q \vee \sim p \vee p) \wedge (\sim q \vee \sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee q) \wedge$$
$$\wedge (\sim p \vee \sim q \vee p).$$

Можно видеть, что все конъюнктивные члены КНФ данной формулы содержат некоторую переменную одновременно со знаком отрицания и без него. Следовательно, данная формула тождественно-истинная.

Каждая не тождественно-истинная формула имеет КНФ, которая называется *совершенной*.

Определение. Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) некоторой формулы называется такая ее КНФ, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) в ней нет двух одинаковых конъюнктивных членов (одинаковыми считаются такие конъюнктивные члены, которые получаются один из другого в результате замены по равносильности (4));

б) ни в одном конъюнктивном члене нет двух одинаковых дизъюнктов;

в) ни в одном конъюнктивном члене нет таких двух дизъюнктов, из которых один есть переменная, а другой — отрицание этой переменной;

г) в каждом конъюнктивном члене содержатся все переменные данной формулы.

Для того чтобы привести формулу к СКНФ, необходимо:

1) известным уже способом привести ее к КНФ;

2) на основании равносильностей (2), (4) и (8) устранить из КНФ повторяющиеся конъюнкты, т. е. из всех имеющихся одинаковых конъюнктивных членов оставить один и вычеркнуть остальные;

3) на основании равносильностей (4) и (9) устранить все повторения в конъюнктивных членах КНФ, т. е. из всех имеющихся одинаковых дизъюнктов оставить один и вычеркнуть остальные;

4) на основании равносильностей (2), (4) и (47) устранить из КНФ те конъюнктивные члены, которые являются тождественно-истинными элементарными дизъюнкциями;

5) ко всем тем конъюнктивным членам, в которых отсутствует какая-нибудь из содержащихся в данной формуле переменных E, на основании равносильности (50) приписать знак дизъюнкции и вслед за ним тождественно-ложную конъюнкцию $(E \wedge \sim E)$, а затем применить правило замены по равносильности (6). Эту процедуру повторять до тех пор, пока не окажется, что в каждый конъюнктивный член входят все переменные, содержащиеся в данной формуле;

6) если в получившейся КНФ снова появились одинаковые конъюнктивные члены, то надо устранить повторения.

Пусть, например, к СКНФ нужно привести формулу

$$((p \rightarrow q) \wedge \sim(\sim r \wedge \sim p) \wedge (\sim q \rightarrow r)) \vee p.$$

Вначале приведем ее к КНФ:

$$((\sim p \vee q) \wedge (r \vee p) \wedge (q \vee r)) \vee p;$$

$$(p \vee \sim p \vee q) \wedge (p \vee r \vee p) \wedge (p \vee q \vee r).$$

Затем, вычеркиваем первый конъюнктивный член и устраняем повторения во втором. Получаем формулу

$$(p \vee r) \wedge (p \vee q \vee r).$$

Так как в первом конъюнктивном члене отсутствует переменная q, то присоединяем к нему знаком дизъюнкции формулу $(q \wedge \sim q)$:

$$(p \vee r \vee (q \wedge \sim q)) \wedge (p \vee q \vee r).$$

Воспользовавшись законом дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции, получаем формулу

$$(p \vee r \vee q) \wedge (p \vee r \vee \sim q) \wedge (p \vee q \vee r).$$

Устраняем один из одинаковых конъюнктивных членов и получаем формулу в СКНФ:

$$(p \vee r \vee q) \wedge (p \vee r \vee \sim q).$$

Упражнения:

I. Привести к КНФ следующие формулы и проверить, являются они тождественно-истинными или нет:

1. $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$;
2. $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s))$;
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r))$;
4. $(p \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$;
5. $((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$.

II. Привести к СКНФ следующие формулы:

1. $(p \rightarrow q) \vee \sim(\sim q \vee r)$;
2. $((\sim(p \rightarrow q) \rightarrow q) \vee \sim q) \vee (p \wedge r)$.

§ 13. Логическое следование и логические следствия

Пусть A_1, A_2, ..., A_n и B — формулы, а E_1, E_2, ..., E_m совокупность всех пропозициональных переменных, входящих по крайней мере в одну из них. Будем говорить, что формула B логически следует из формул A_1, A_2, ..., A_n, если при всех тех логических значениях E_1, E_2, ..., E_m, при которых формулы A_1, A_2, ..., A_n истинны, она тоже истинна.

Для того чтобы проверить, выполняется ли это условие, нужно выяснить, может ли формула

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B,$$

хотя бы при одном наборе логических значений переменных E_1, E_2, ..., E_m, быть ложной. Если эта формула тождественно-истинна, то не существует такого набора логических значений ее переменных, при котором подформулы A_1, A_2, ..., A_n истинны, а подформула B ложна. Таким образом, формула B логически следует из формул A_1, A_2, ..., A_n, если тождественно-истинна формула

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B.$$

Формула B называется в этом случае *логическим следствием* (*заключением*) формул A_1, A_2, ..., A_n, а формулы A_1, A_2, ..., A_n называются *посылками* формулы B.

Используя в качестве разрешающей процедуры процесс приведения формул к КНФ, можно для любой формулы B и любого списка формул A_1, A_2, ..., A_n решить логическую задачу: является B логическим следствием совокупности посылок A_1, A_2, ..., A_n или нет?

Проверим, например, следует ли формула r из формул $p \vee q$, $p \to r$ и $q \to r$? С этой целью строим формулу

$$((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)) \to r$$

и приводим ее к КНФ:

$$\sim ((p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)) \vee r;$$

$$\sim (p \vee q) \vee \sim (\sim p \vee r) \vee \sim (\sim q \vee r) \vee r;$$

$$(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r) \vee r;$$

$$((p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (\sim r \vee \sim p) \wedge (\sim r \vee \sim q)) \vee \\ \vee (q \wedge \sim r) \vee r;$$

$$((q \vee p \vee \sim p) \wedge (q \vee p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim r \vee \sim p) \wedge \\ \wedge (q \vee \sim r \vee \sim q) \wedge (\sim r \vee p \vee \sim p) \wedge (\sim r \vee p \vee \sim q) \wedge \\ \wedge (\sim r \vee \sim r \vee \sim p) \wedge (\sim r \vee \sim r \vee \sim q)) \vee r;$$

$$(r \vee q \vee p \vee \sim p) \wedge (r \vee q \vee p \vee \sim q) \wedge (r \vee q \vee \sim r \vee \sim p) \wedge \\ \wedge (r \vee q \vee \sim r \vee \sim q) \wedge (r \vee \sim r \vee p \vee \sim p) \wedge \\ \wedge (r \vee \sim r \vee p \vee \sim q) \wedge (r \vee \sim r \vee \sim r \vee \sim p) \wedge \\ \wedge (r \vee \sim r \vee \sim r \vee \sim q).$$

Так как в каждом из конъюнктов КНФ данной формулы содержится по крайней мере одна переменная со знаком отрицания и без него, то данная формула тождественно-истинная и r логически следует из $(p \vee q)$, $(p \rightarrow r)$ и $(q \rightarrow r)$.

Рассмотрим другой пример. *Три цеха договорились, что при утверждении проектов должны соблюдаться следующие условия: а) если второй цех не участвует в утверждении проекта, то в этом утверждении не участвует и первый цех; б) если второй цех принимает участие в утверждении проекта, то в нем принимают участие первый и третий цеха. Обязан ли при этих условиях третий цех принимать участие в утверждении проекта, когда в нем принимает участие первый цех?*

Переведем условия задачи на язык логики высказываний. Пусть высказыванию *Первый цех участвует в утверждении проекта* соответствует переменная p, высказыванию *Второй цех участвует в утверждении проекта* — переменная q, а высказыванию *Третий цех участвует в утверждении проекта* — переменная r. Тогда условиям а) и б) соответствуют формулы $\sim q \rightarrow \sim p$ и $q \rightarrow (p \wedge r)$.

Требуется решить, следует ли из этих условий формула $p \rightarrow r$? Для этого строим формулу

$$((\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (q \rightarrow (p \wedge r))) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

и приводим ее к КНФ:

$$\sim((q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee (p \wedge r))) \vee (\sim p \vee r);$$

$$(\sim(q \vee \sim p) \vee \sim(\sim q \vee (p \wedge r))) \vee \sim p \vee r;$$

$$((\sim q \wedge p) \vee (q \wedge \sim(p \wedge r))) \vee \sim p \vee r;$$

$$((\sim q \wedge p) \vee (q \wedge (\sim p \vee \sim r))) \vee \sim p \vee r;$$

$$((q \vee \sim q) \wedge (q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee \sim q) \wedge$$
$$\wedge (\sim p \vee \sim r \vee p)) \vee \sim p \vee r;$$

$$(\sim p \vee r \vee q \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee r \vee q \vee p) \wedge$$
$$\wedge (\sim p \vee r \vee \sim p \vee \sim r \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee r \vee \sim p \vee \sim r \vee p).$$

Так как получившаяся формула тождественно-истинная, то из условий задачи следует, что третий цех обязан принимать участие в утверждении проекта, когда в нем принимает участие первый цех.

Процедуру приведения формулы к СКНФ используют для решения задачи отыскания логических следствий данных посылок. Можно указать следующий метод систематического обзора следствий из любого числа посылок.

Связываем посылки знаком конъюнкции, и получившуюся формулу приводим к СКНФ. Каждый конъюнктивный член СКНФ, а также любая конъюнкция конъюнктивных членов являются следствием конъюнкции посылок.

Например, пусть даны посылки p и $p \to q$. Конъюнкцию посылок приводим к СКНФ:

$$p \wedge (p \to q);$$
$$p \wedge (\sim p \vee q);$$
$$(p \wedge (q \wedge \sim q)) \wedge (\sim p \vee q);$$
$$(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q).$$

С помощью этой СКНФ мы можем теперь получить обзор всех таких следствий из конъюнкции данных посылок, каждое из которых само имеет СКНФ:

$$1)\quad p \vee q; \qquad 2)\quad p \vee \sim q; \qquad 3)\quad \sim p \vee q;$$
$$4)\quad (p \vee q) \wedge (p \vee \sim q); \qquad 5)\quad (p \vee q) \wedge (\sim p \vee q);$$
$$6)\quad (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q); \ 7)\quad (p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q).$$

Затем, используя, например, равносильность (18), можно упрощать полученные следствия: из следствия 4) получить следствие p, которое является одной из посылок (вторая посылка есть 3)), а из 5) получить следствие q.

Рассмотрим следующий пример[3]. *Если теорема о сложении скоростей верна и в системе неподвижных звезд свет распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью, то на Земле скорость распространения света не по всем направлениям одинакова. Из опыта известно, что свет в системе неподвижных звезд распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью, и что на Земле скорость распространения света по всем направлениям одинакова. Что отсюда следует?*

Пусть высказыванию *Теорема о сложении скоростей верна* соответствует переменная p; высказыванию *В системе неподвижных звезд свет распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью* — переменная q, а высказыванию *На Земле свет распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью* — переменная r. Тогда условия задачи выражаются в посылках: 1) $(p \wedge q) \to \sim r$ и 2) $q \wedge r$.

Находим СКНФ конъюнкции этих посылок:

$$((p \wedge q) \to \sim r) \wedge q \wedge r;$$
$$(\sim (p \wedge q) \vee \sim r) \wedge q \wedge r;$$
$$(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge q \wedge r;$$
$$(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (q \vee (p \wedge \sim p)) \wedge (r \vee (p \wedge \sim p));$$
$$(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (q \vee p) \wedge (q \vee \sim p) \wedge (r \vee p) \wedge (r \vee \sim p);$$
$$(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (q \vee p \vee (r \wedge \sim r)) \wedge (q \vee \sim p \vee (r \wedge \sim r)) \wedge$$
$$\wedge (r \vee p \vee (q \wedge \sim q)) \wedge (r \vee \sim p \vee (q \wedge \sim q));$$

[3] См.: Гильберт Д. и Аккерман В. Основы теоретической логики. М., 1947, с. 47.

$$(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (q \vee p \vee r) \wedge (q \vee p \vee \sim r) \wedge$$
$$\wedge (q \vee \sim p \vee r) \wedge (q \vee \sim p \vee \sim r) \wedge (r \vee p \vee q) \wedge$$
$$\wedge (r \vee p \vee \sim q) \wedge (r \vee \sim p \vee q) \wedge (r \vee \sim p \vee \sim q);$$
$$(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (q \vee p \vee r) \wedge (q \vee p \vee \sim r) \wedge$$
$$\wedge (q \vee \sim p \vee r) \wedge (q \vee \sim p \vee \sim r) \wedge (r \vee p \vee \sim q) \wedge$$
$$\wedge (r \vee \sim p \vee \sim q).$$

К конъюнкции первого и пятого, четвертого и седьмого конъюнктивных членов получившейся СКНФ несколько раз применяем правило замены по равносильности (18) и находим наиболее интересное по содержанию следствие:

$$(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (q \vee \sim p \vee \sim r) \wedge (q \vee \sim p \vee r) \wedge$$
$$\wedge (r \vee \sim p \vee \sim q);$$
$$(\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee r);$$
$$\sim p,$$

т. е. что теорема о сложении скоростей неверна.

Упражнения:

I. Выяснить верно ли, что

1) формула $\sim r \vee \sim q$ логически следует из формул p и $p \to \sim (q \wedge r)$;

2) формула $p \to \sim r$ логически следует из формул $\sim p \vee q$ и $\sim (q \wedge r)$

3) формула $\sim (r \wedge s)$ логически следует из формул $p \vee q$, $p \to \sim r$ и $q \to \sim s$?

II. Найти все следствия в СКНФ из посылок:

1) $p \vee q$, $p \to \sim r$ и $p \to q$;

2) $\sim p \to q$, $q \to r$ и $\sim r \to p$.

III. В студенческой группе возникла следующая ситуация: каждый студент, который умеет играть в шахматы, или имеет спортивный разряд, или хорошо учится, но не то и другое вместе; если студент имеет спортивный разряд, то он умеет играть в шахматы. Следует ли отсюда, что в группе нет студентов, которые имеют спортивный разряд и в то же время хорошо учатся?

IV. Проверить справедливость следующего рассуждения полицейского детектива: Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей.

§ 14. Сокращенная конъюнктивная нормальная форма

Мы видели, что с помощью СКНФ можно получить обзор всех таких следствий из данных посылок, которые сами имеют СКНФ. Однако нас обычно интересуют лишь наиболее сильные[4] следствия данных посылок. С этой точки зрения представляют интерес так называемые **простые следствия**. Следствие **B** из посылок $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ называют простым, если **B** есть такая не содержащая повторений и не тождественно-истинная элементарная дизъюнкция, которая не «поглощается» (в смысле «закона поглощения» — равносильности (19)) никаким другим более сильным следствием из посылок $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ такого же вида. Простые следствия из данных посылок можно найти, приводя их конъюнкцию к сокращенной КНФ.

Определение. Сокращенной КНФ данной формулы называется такая ее КНФ, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) ни в одном конъюнктивном члене нет двух одинаковых дизъюнктов;

б) ни в одном конъюнктивном члене нет таких двух дизъюнктов, из которых один есть переменная, а другой отрицание этой переменной;

в) нет таких пар конъюнктивных членов, что каждый дизъюнкт из одного имеется в другом, т. е., во-первых, нет двух одинаковых конъюнктивных членов, а во-вторых, нет таких двух конъюнктивных членов, из которых один поглощается другим;

г) если имеются такие два конъюнктивных члена, из которых один содержит некоторую переменную, а другой — ее отрицание (при условии, что другой переменной, для которой это же имеет место, в данных конъюнктах нет), то в той же КНФ имеется конъюнктивный член, который является элементарной дизъюнкцией, построенной из всех дизъюнктов данной пары, отличных от упомянутой переменной и ее отрицания.

Для того чтобы привести формулу к сокращенной КНФ нужно:

1) привести ее к КНФ;

2) из всех одинаковых конъюнктивных членов КНФ оставить только один и в элементарных дизъюнкциях также устранить все повторения;

3) устранить из КНФ все тождественно-истинные конъюнктивные члены;

4) если среди конъюнктивных членов КНФ имеются два таких, что один содержит некоторую переменную, а другой — ее отрицание, то на основании закона выявления, т. е. равносильности (21), добавить новый конъюнктивный член, представляющий собой дизъюнкцию остальных дизъюнктов этих двух конъюнктивных членов, но лишь при условии, что новый конъюнктивный член не тождественно-истинный и отличается от уже имеющихся.

---

[4] Говорят, что формула **A** сильнее формулы **B**, а формула **B** слабее формулы **A**, если тождественно-истинна формула $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, но не формула $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$.

Например, если в КНФ имеются конъюнктивные члены $(p \vee q \vee r)$ и $(\sim r \vee s)$, но нет конъюнктивного члена $(p \vee q \vee s)$, то следует добавить его. Но если в КНФ имеются конъюнктивные члены $(p \vee r \vee \sim s)$ и $(\sim p \vee q \vee s)$, то не следует добавлять конъюнктивного члена $(r \vee \sim s \vee q \vee s)$, поскольку он тождественно-истинный, а таких согласно п. б) в сокращенной КНФ не должно быть.

В качестве законов выявления мы будем также использовать равносильности:

$$\mathbf{C} \wedge (\mathbf{B} \vee \sim \mathbf{C}) \text{ равносильно } \mathbf{C} \wedge (\mathbf{B} \vee \sim \mathbf{C}) \wedge \mathbf{B} \qquad (21а)$$

и

$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \wedge \sim \mathbf{C} \text{ равносильно } (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \wedge \sim \mathbf{C} \wedge \mathbf{A}, \qquad (21б)$$

которые можно рассматривать как такие частные случаи равносильности (21), в которых отсутствуют либо формула **A**, либо формула **B**. Так, если в КНФ имеются конъюнктивные члены q и $(p \vee \sim q)$, то припишем новый конъюнктивный член p, а если имеются конъюнктивные члены $(p \vee q \vee r)$ и $\sim r$, то припишем новый конъюнктивный член $(p \vee q)$;

5) если в новых (добавленных) конъюнктивных членах КНФ имеются повторения, то устранить их;

6) если конъюнкты КНФ с помощью равносильностей (2) и (4) можно перестроить так, что с ним будет применим закон поглощения, т. е. равносильность (19), то применяя правило замены по этой равносильности, устраняем все поглощаемые конъюнктивные члены.

Приводя формулу к сокращенной КНФ, бывает удобно чередовать применение законов выявления и поглощения.

Формула, получившаяся в результате применения пп. 1)—6), имеет сокращенную конъюнктивную нормальную форму и каждый ее конъюнкт есть простое следствие исходной формулы.

Для того чтобы получить обзор всех простых следствий из некоторого множества посылок, нужно конъюнкцию этих посылок привести к сокращенной КНФ.

Рассмотрим следующие примеры.

1. Даны посылки $p \rightarrow \sim q$, $\sim p \rightarrow r$ и $\sim (q \wedge r)$. Найти все их простые следствия.

Приводим конъюнкцию посылок к КНФ:

$$(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim p \rightarrow r) \wedge \sim (q \wedge r);$$
$$(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r).$$

Производим все выявления:

$$(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee r) \wedge$$
$$\wedge (p \vee \sim q) \wedge (\sim q \vee \sim q).$$

Устраняем повторения в новых конъюнктах:

$$(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee r) \wedge \wedge (p \vee \sim q) \wedge \sim q.$$

Производим все поглощения:

$$(p \vee r) \wedge \sim q.$$

Формулы $(p \vee r)$ и $\sim q$ являются простыми следствиями данных посылок, т. е. если посылки истинны, то формула $(\tilde{p} \vee r)$ истинна, а q — ложна.

2. В совершении некоторого поступка подозревают только одного из четырех лиц: К., Л., М. и Н.; К. утверждает, что поступок совершил Л., Л. — что поступок совершил Н., М. — что он этого поступка не совершал, Н. тоже говорит, что он этого поступка не совершал. Кто же совершил поступок, если известно, что только одно из этих утверждений истинно?

Пусть высказыванию *Поступок совершил К.* соответствует переменная p; высказыванию *Поступок совершил Л.* — переменная q; высказыванию *Поступок совершил М.* — переменная r; высказыванию *Поступок совершил Н.* — переменная s. Тогда условие, что поступок мог совершить только один из четырех, можно записать в виде формулы, которая выражает, что никакие два из четырех высказываний не могут быть оба истинными:

$$\sim (p \wedge q) \wedge \sim (p \wedge r) \wedge \sim (p \wedge s) \wedge \sim (q \wedge r) \wedge \sim (q \wedge s) \wedge \wedge \sim (r \wedge s).$$

Утверждения каждого из четырех означают последовательно: q, s, $\sim r$ и $\sim s$. Но так как истинно только одно из них, то никакие два из этих утверждений не являются одновременно истинными. Это условие можно записать следующим образом:

$$\sim (q \wedge s) \wedge \sim (q \wedge \sim r) \wedge \sim (q \wedge \sim s) \wedge \sim (s \wedge \sim r) \wedge \wedge \sim (s \wedge \sim s) \wedge \sim (\sim r \wedge \sim s).$$

Конъюнкцию двух последних формул приводим к КНФ:

$$\sim (p \wedge q) \wedge \sim (p \wedge r) \wedge \sim (p \wedge s) \wedge \sim (q \wedge r) \wedge \wedge \sim (q \wedge s) \wedge \sim (r \wedge s) \wedge \sim (q \wedge s) \wedge \sim (q \wedge \sim r) \wedge \sim (q \wedge \sim s) \wedge \wedge \sim (s \wedge \sim r) \wedge \sim (s \wedge \sim s) \wedge \sim (\sim r \wedge \sim s);$$

$$(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim s) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge \wedge (\sim q \vee \sim s) \wedge (\sim r \vee \sim s) \wedge (\sim q \vee \sim s) \wedge (\sim q \vee r) \wedge \wedge (\sim q \vee s) \wedge (\sim s \vee r) \wedge (\sim s \vee s) \wedge (r \vee s).$$

Далее, устраняя повторения и вычеркивая тождественно-истинный конъюнктивный член, получаем формулу

$$(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim s) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge \wedge (\sim q \vee \sim s) \wedge (\sim r \vee \sim s) \wedge (\sim q \vee r) \wedge (\sim q \vee s) \wedge \wedge (\sim s \vee r) \wedge (r \vee s).$$

Применяем закон выявления сначала к 5-му и 8-му конъюнктивным членам, затем к 6-му и 9-му, затем к 9-му и 10-му, и, наконец, ко 2-му и вновь выявленному 13-му. После сокращения повторений в выявленных конъюнктивных членах получаем формулу:

$$(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim s) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge$$
$$\wedge (\sim q \vee \sim s) \wedge (\sim r \vee \sim s) \wedge (\sim q \vee r) \wedge (\sim q \vee s) \wedge (\sim s \vee r) \wedge$$
$$\wedge (r \vee s) \wedge \sim q \wedge \sim s \wedge r \wedge \sim p.$$

Производим все поглощения и получаем сокращенную КНФ

$$\sim q \wedge \sim s \wedge r \wedge \sim p,$$

из которой видно, что p, q и s ложны, а r, т. е. высказывание *Поступок совершил М.* — истинно.

3. Семья, состоящая из отца, матери, сына, а также старшей и младшей дочери, купила телевизор. Условились, что в первый вечер будут смотреть передачи в таком порядке: 1) когда отец смотрит передачу, мать тоже смотрит передачу; 2) дочери, обе или одна из них, смотрят передачу; 3) из двух членов семьи — мать и сын — смотрит передачу один и только один; 4) сын смотрит передачу тогда и только тогда, когда ее смотрит старшая дочь, 5) если младшая дочь смотрит передачу, то отец и старшая дочь делают то же. Кто из членов семьи смотрел в этот вечер передачу?

Пусть высказываниям *Отец смотрит передачу* соответствует переменная p; *Мать смотрит передачу* — переменная q; *Сын смотрит передачу* — переменная r; *Старшая дочь смотрит передачу* — переменная s; *Младшая дочь смотрит передачу* — переменная t.

Тогда условия задачи выражают формулы:

$$1)\ p \rightarrow q; \qquad 2)\ s \vee t; \qquad 3)\ q \nleftrightarrow r; \qquad 4)\ r \leftrightarrow s;$$
$$5)\ t \rightarrow (p \wedge s).$$

Конъюнкцию этих формул приводим к КНФ:

$$(p \rightarrow q) \wedge (s \vee t) \wedge (q \nleftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow s) \wedge (t \rightarrow (p \wedge s));$$
$$(\sim p \vee q) \wedge (s \vee t) \wedge (q \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge (\sim r \vee s) \wedge$$
$$\wedge (\sim s \vee r) \wedge (\sim t \vee p) \wedge (\sim t \vee s).$$

Применяя закон выявления ко второму и последнему конъюнктам, получаем формулу

$$(\sim p \vee q) \wedge (s \vee t) \wedge (q \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge (\sim r \vee s) \wedge (\sim s \vee r) \wedge$$
$$\wedge (\sim t \vee p) \wedge (\sim t \vee s) \wedge s.$$

Затем производим поглощения — последний конъюнктивный член s поглощает второй, пятый и восьмой конъюнктивные члены, а к шестому и последнему конъюнктам вновь применяем закон выявления. Получаем формулу

$$(\sim p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge (\sim s \vee r) \wedge (\sim t \vee p) \wedge s \wedge r$$

Производим поглощения: последний конъюнкт поглощает второй и четвертый, а к третьему и последнему конъюнктам применяем закон выявления. Получаем формулу

$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge (\sim t \vee p) \wedge s \wedge r \wedge \sim q.$$

Вновь производим поглощения: последний конъюнкт поглощает второй, а к последнему и первому конъюнктам применяем закон выявления. Получаем формулу

$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim t \vee p) \wedge s \wedge r \wedge \sim q \wedge \sim p.$$

Производим опять поглощения: последний конъюнкт поглощает первый, а к последнему и второму применяем закон выявления. Получаем формулу

$$(\sim t \vee p) \wedge s \wedge r \wedge \sim q \wedge \sim p \wedge \sim t.$$

Наконец, еще раз производим поглощения и получаем сокращенную КНФ конъюнкции посылок

$$s \wedge r \wedge \sim q \wedge \sim p \wedge \sim t.$$

Из последней формулы видно, что старшая дочь и сын смотрят передачу, а мать, отец и младшая дочь — не смотрят.

Процедуру приведения к сокращенной КНФ можно использовать для упрощения формул.

Рассмотрим, например, следующую задачу.

В ходе анализа химических свойств некоторого класса веществ экспериментатор обнаруживает последовательно следующие закономерности:

1) если вещество обладает свойством A и свойством B, то оно обладет также и свойством C;

2) если имеют место свойства B и D, то имеет место также или свойство A, или свойство C;

3) если вещество обладает свойством B, но не обладает свойством A, то оно обладет также или свойством C, или свойством D;

4) если свойство B имеет место, а свойство C отсутствует, то свойство A также отсутствует.

Требуется упростить эту информацию.

Пусть высказываниям *Вещество обладает свойством A* соответствует переменная p; *Вещество обладает свойством B* — переменная q; *Вещество обладает свойством C* — переменная r; *Вещество обладает свойством D* — переменная s. Тогда обнаруженные закономерности можно записать следующими формулами:

1) $(p \wedge q) \to r$; 2) $(q \wedge s) \to (p \vee r)$;

3) $(q \wedge \sim p) \to (r \vee s)$; 4) $(q \wedge \sim r) \to \sim p$.

Приводим конъюнкцию этих формул к сокращенной КНФ:

$$((p \wedge q) \to r) \wedge ((q \wedge s) \to (p \vee r)) \wedge ((q \wedge \sim p) \to (r \vee s)) \wedge$$
$$\wedge ((q \wedge \sim r) \to \sim p);$$

$$(\sim (p \wedge q) \vee r) \wedge (\sim (q \wedge s) \vee p \vee r) \wedge (\sim (q \wedge \sim p) \vee r \vee s) \wedge$$
$$\wedge (\sim (q \wedge \sim r) \vee \sim p);$$

$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim s \vee p \vee r) \wedge (\sim q \vee p \vee r \vee s) \wedge$$
$$\wedge (\sim q \vee r \vee \sim p);$$

$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim s \vee p \vee r) \wedge (\sim q \vee p \vee r \vee s);$$

$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim s \vee p \vee r) \wedge (\sim q \vee p \vee r \vee s) \wedge$$
$$\wedge (\sim q \vee p \vee r) \wedge (\sim q \vee r);$$

$$\sim q \vee r.$$

Таким образом, конъюнкция формул 1), 2), 3) и 4) равносильна формуле $\sim q \vee r$, которая в свою очередь согласно равносильности (13) равносильна формуле $q \to r$. Следовательно, информация, заключенная в 1)—4) равносильна высказыванию. *Если вещество обладает свойством В, то оно обладает свойством С.*

Упражнения:

I. Найти все простые следствия из посылок:

1. $p \vee q$, $q \vee r$ и $\sim p \wedge r$;
2. $p \to q$, $p \to r$ и $\sim q \vee \sim r$.

II. Используя условия из примера 2 (с. 257), узнать, кто совершил поступок, если известно, что только одно из этих утверждений ложно.

III. Методом приведения к совершенной КНФ решить следующую задачу. Рабочий должен следить за деталями, движущимися мимо него по конвейеру, он должен снимать с ленты некоторые детали и пропускать остальные. Бригадир сказал ему, чтобы сегодня он снимал детали, которые удовлетворяют одновременно ряду условий, а именно они:

а) обладают по крайней мере одной из следующих характеристик — искривлены, заржавлены или не окрашены;

б) или нестандартны, или заржавлены, или то и другое вместе;

в) или искривлены, или не заржавлены, или то и другое вместе;

г) или нестандартны, или не заржавлены, или то и другое вместе;

д) обладают хотя бы одной из следующих характеристик: искривлены, заржавлены или окрашены.

Предложенную в столь неудобной форме инструкцию рабочий упростил до двух характеристик объектов. Какие это характеристики?

§ 15. Дизъюнктивные нормальные формы

Формулы логики высказываний наряду с КНФ могут иметь дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ).

Условимся называть элементарной конъюнкцией формулу, которая имеет вид

$$\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_n,$$

где $n \geqslant 1$, а $\mathbf{A}_i$ $(i \leqslant n)$ — либо переменная, либо отрицание переменной. Например, формула

$$p \land q \land \sim r \land p \land \sim q \land r$$

— элементарная конъюнкция, формула же

$$(p \lor q) \land r \land p$$

элементарной конъюнкцией не является, так как ее первый конъюнктивный член не есть ни переменная, ни отрицание переменной.

Теорема. *Элементарная конъюнкция тождественно-ложна тогда и только тогда, когда в нее входит хотя бы одна пара конъюнктивных членов, из которых один есть некоторая переменная, а другой — ее отрицание.*

Доказательство. В самом деле, элементарная конъюнкция, содержащая такую пару, либо имеет вид

$$\mathbf{E} \land \sim \mathbf{E} \land \mathbf{K},$$

где $\mathbf{E}$ переменная, а подформула $\mathbf{K}$ — элементарная конъюнкция (которой может и не быть), либо ей можно придать этот вид в результате применения правила замены по равносильности (2). Так как подформула $\mathbf{E} \land \sim \mathbf{E}$ тождественно-ложна, то согласно (48′) и вся элементарная конъюнкция

$$\mathbf{E} \land \sim \mathbf{E} \land \mathbf{K}$$

тождественно-ложная формула, независимо от того, истинна или ложна подформула $\mathbf{K}$.

Наличие переменной и ее отрицания не только достаточное, но и необходимое условие тождественной ложности элементарной конъюнкции. Действительно, допустим, что в элементарной конъюнкции такой пары нет. Придадим каждой переменной, не стоящей под знаком отрицания, логическое значение «истина», а каждой переменной, стоящей под знаком отрицания, — значение «ложь». Тогда каждый из конъюнктивных членов получает значение «истина», а значит, вся элементарная конъюнкция имеет значение «истина» и не является тождественно-ложной формулой.

Определение. Формула логики высказываний имеет дизъюнктивную нормальную форму, если она имеет вид

$$\mathbf{B}_1 \lor \mathbf{B}_2 \lor \ldots \lor \mathbf{B}_m,$$

где $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ — элементарные конъюнкции и $m \geqslant 1$.

Например, формула

$$p \lor (\sim q \land r) \lor \sim s \lor (\sim p \land \sim r)$$

имеет дизъюнктивную нормальную форму.

Любая формула логики высказываний в результате ряда равносильных замен может быть приведена к дизъюнктивной нормальной форме. Формулу, равносильную данной и имеющую дизъюнктивную нормальную форму, будем называть **дизъюнктивной нормальной формой** данной формулы.

Для того чтобы привести формулу к ДНФ, необходимо вначале привести ее к нормальной форме. Затем каждую подформулу вида $(\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}))$ согласно равносильности (7) и каждую подформулу вида $((\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \wedge \mathbf{A})$ согласно равносильности (7′) заменить формулой $((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}))$.

Рассмотрим процесс приведения формулы к ДНФ на следующем примере. Пусть дана формула

$$(p \to \sim q) \leftrightarrow (\sim r \wedge s).$$

Приводим ее к ДНФ:

$$(\sim(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim r \wedge s)) \wedge (\sim(\sim r \wedge s) \vee (\sim p \vee \sim q));$$

$$((p \wedge q) \vee (\sim r \wedge s)) \wedge (r \vee \sim s \vee \sim p \vee \sim q);$$

$$(r \wedge p \wedge q) \vee (r \wedge \sim r \wedge s) \vee (\sim s \wedge p \wedge q) \vee (\sim s \wedge \sim r \wedge s) \vee$$
$$\vee (\sim p \wedge p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim r \wedge s) \vee (\sim q \wedge p \wedge q) \vee$$
$$\vee (\sim q \wedge \sim r \wedge s).$$

Формула не единственным образом представима в ДНФ. Формула, имеющая ДНФ, тождественно-ложна тогда и только тогда, когда тождественно-ложны все ее дизъюнктивные члены, т. е. когда каждая элементарная конъюнкция содержит хотя бы одну пару конъюнктов, из которых один есть некоторая переменная, а другой — ее отрицание. Таким образом, по виду некоторой формулы в КНФ можно судить о том, тождественно-ложна она или нет.

Например, пусть дана формула

$$\sim((p \to q) \to ((p \vee r) \to (q \vee r))).$$

Приводим ее к ДНФ:

$$\sim(\sim(\sim p \vee q) \vee (\sim(p \vee r) \vee (q \vee r)));$$

$$(\sim p \vee q) \wedge \sim(\sim(p \vee r) \vee (q \vee r));$$

$$(\sim p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge \sim(q \vee r));$$

$$(\sim p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge \sim q \wedge \sim r);$$

$$(\sim p \vee q) \wedge ((\sim q \wedge \sim r \wedge p) \vee (\sim q \wedge \sim r \wedge r));$$

$$(\sim q \wedge \sim r \wedge p \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge \sim r \wedge p \wedge q) \vee$$
$$\vee (\sim q \wedge \sim r \wedge r \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge \sim r \wedge r \wedge q).$$

Можно видеть, что все дизъюнктивные члены ДНФ данной формулы содержат некоторую переменную одновременно со знаком отрицания и без него. Следовательно, данная формула тождественно-ложная.

Каждая не тождественно-ложная формула имеет ДНФ, которая называется совершенной.

Определение. Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) некоторой формулы называется такая ее ДНФ, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) в ней нет двух одинаковых дизъюнктивных членов (одинаковыми считаются такие дизъюнктивные члены, которые получаются один из другого в результате замены по равносильности (2));

б) ни в одном дизъюнктивном члене нет двух одинаковых конъюнктов;

в) ни в одном дизъюнктивном члене нет таких двух конъюнктов, из которых один есть переменная, а другой — отрицание этой переменной;

г) в каждом дизъюнктивном члене содержатся все переменные данной формулы.

Для того чтобы привести формулу к СНДФ, необходимо:

1) привести ее к ДНФ;

2) на основании равносильностей (2), (4) и (9) устранить из ДНФ повторяющиеся дизъюнкты, т. е. из всех имеющихся одинаковых дизъюнктов оставить один и вычеркнуть остальные;

3) на основании равносильностей (2) и (8) устранить все повторения в дизъюнктивных членах ДНФ, т. е. из всех имеющихся одинаковых конъюнктов оставить один и вычеркнуть остальные;

4) на основании равносильностей (2), (4) и (50) устранить из формулы те дизъюнктивные члены, которые являются тождественно-ложными элементарными конъюнкциями;

5) ко всем тем дизъюнктивным членам, в которых отсутствует какая-нибудь из содержащихся в данной формуле переменных E, на основании равносильности (47) приписать знак конъюнкции, вслед за ним — тождественно-истинную дизъюнкцию $(\mathbf{E} \vee \sim \mathbf{E})$ и применить правило замены по равносильности (7). Эту процедуру повторять до тех пор, пока не окажется, что в каждый дизъюнктивный член входят все переменные, содержащиеся в данной формуле;

6) если в получившейся ДНФ снова появились одинаковые дизъюнктивные члены, то надо устранить повторения.

Пусть, например, требуется привести к СДНФ формулу

$$(p \to q) \wedge (\sim q \to p).$$

Вначале приведем ее к ДНФ:

$$(\sim p \vee q) \wedge (q \vee p);$$

$$(q \wedge \sim p) \vee (q \wedge q) \vee (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q).$$

Устраняя повторения и вычеркивая тождественно-ложные дизъюнктивные члены, получаем формулу

$$(q \wedge \sim p) \vee q \vee (p \wedge q).$$

Пополняем второй дизъюнкт недостающей переменной p:

$$(q \wedge \sim p) \vee (q \wedge (p \vee \sim p)) \vee (p \wedge q);$$
$$(q \wedge \sim p) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \sim p) \vee (p \wedge q).$$

Устраняем возникшие повторения и получаем СДНФ данной формулы:

$$(q \wedge \sim p) \vee (q \wedge p).$$

В конце § 7 рассматривались формулы, однозначно определяющие таблицы логических функций. Легко убедиться в том, что каждая такая формула имеет СДНФ.

Гипотезой формулы **B** называют такую формулу **A**, что формула **A**$\rightarrow$**B** тождественно-истинна. Если **A** — гипотеза формулы **B**, то **A** $\wedge$ **C** — тоже гипотеза формулы **B**; если **A** и **C** — гипотезы формулы **B**, то **A** $\vee$ **C** — тоже гипотеза **B**. Дизъюнктивные члены СДНФ данной формулы есть различные гипотезы, при истинности которых данная формула истинна.

С помощью СДНФ можно получить обзор всех гипотез данной формулы, которые имеют СДНФ. Но нас обычно интересуют лишь самые слабые гипотезы. С этой точки зрения представляют интерес так называемые простые гипотезы. Гипотеза **A** формулы **B** называется простой, если **A** есть элементарная конъюнкция, которая не тождественно-ложна, не содержит повторений и не поглощается никакой другой, более слабой, гипотезой формулы **B** такого же вида. Простые гипотезы данной формулы можно найти, приводя ее к сокращенной ДНФ.

Определение. Сокращенной ДНФ данной формулы называется такая ее ДНФ, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) ни в одном дизъюнктивном члене нет двух одинаковых конъюнктов;

б) ни в одном дизъюнктивном члене нет таких двух конъюнктов, из которых один есть переменная, а другой — отрицание этой переменной;

в) нет таких пар дизъюнктивных членов, что каждый конъюнкт из одного имеется в другом; т. е., во-первых, нет двух одинаковых дизъюнктивных членов, а во-вторых, нет таких двух дизъюнктивных членов, из которых один поглощается другим;

г) если имеются такие два дизъюнктивных члена, из которых один содержит некоторую переменную, а другой — ее отрицание (при условии, что другой переменной для которой это же имеет место, в данных дизъюнктах нет), то в этой же ДНФ имеется дизъюнктивный член, который является элементарной конъюнкцией, построенной из всех конъюнктов данной пары, отличных от упомянутой переменной и ее отрицания.

Для того чтобы привести формулу к сокращенной ДНФ нужно произвести следующие преобразования:

1) привести ее к ДНФ;

2) из всех одинаковых дизъюнктивных членов ДНФ оставить только один и в элементарных конъюнкциях тоже устранить все повторения;

3) устранить из ДНФ все тождественно-ложные дизъюнктивные члены;

4) если среди дизъюнктивных членов ДНФ имеются два таких, что один содержит некоторую переменную, а другой — ее отрицание, то на основании закона выявления, т. е. равносильности (22), добавить новый дизъюнктивный член, представляющий собой конъюнкцию остальных конъюнктов этих двух дизъюнктивных членов, но лишь при условии, что новый дизъюнктивный член не тождественно-ложный и отличается от всех уже имеющихся.

Например, если в ДНФ имеются дизъюнктивные члены $(p \wedge q \wedge r)$ и $(\sim r \wedge s)$, то если в ДНФ нет дизъюнктивного члена $(p \wedge q \wedge s)$, добавить его к ДНФ.

В качестве законов выявления мы будем также использовать равносильности

$$\mathbf{C} \vee (\mathbf{B} \wedge \sim \mathbf{C}) \text{ равносильно } \mathbf{C} \vee (\mathbf{B} \wedge \sim \mathbf{C}) \vee \mathbf{B} \qquad (22\text{а})$$

и

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \vee \sim \mathbf{C} \text{ равносильно } (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \vee \sim \mathbf{C} \vee \mathbf{A}, \qquad (22\text{б})$$

которые можно рассматривать как такие частные случаи равносильности (22), в которых отсутствуют либо формула **A**, либо формула **B**.

5) если в новых дизъюнктивных членах ДНФ имеются повторения, то устранить их;

6) если среди дизъюнктивных членов ДНФ имеются такие, которые поглощаются другими, то применяя правило замены по равносильности (20), устранить все поглощаемые дизъюнктивные члены.

Получившаяся в результате формула есть сокращенная ДНФ данной формулы, каждый дизъюнкт которой — ее простая гипотеза. Таким образом, для того чтобы получить все простые гипотезы, т. е. найти те самые слабые допущения, при которых данная формула была бы их следствием, нужно привести формулу к сокращенной ДНФ.

Рассмотрим следующий пример. Пусть дана формула

$$((p \wedge q) \vee r) \rightarrow r.$$

Приводим ее к сокращенной ДНФ:

$$\sim((p \wedge q) \vee r) \vee r;$$

$$(\sim(p \wedge q) \wedge \sim r) \vee r;$$

$$((\sim p \vee \sim q) \wedge \sim r) \vee r;$$

$$(\sim r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge \sim q) \vee r;$$

$$(\sim r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge \sim q) \vee r \vee \sim p \vee \sim q;$$

$$r \vee \sim p \vee \sim q.$$

Таким образом, данная формула логически следует из гипотезы r, или гипотезы $\sim p$, или гипотезы $\sim q$.

Упражнения:

I. Привести к ДНФ формулу

$$((p \nleftrightarrow q) \to (\sim q \wedge r)) \leftrightarrow \sim r.$$

II. Привести к СДНФ формулу

$$((p \to q) \nleftrightarrow (r \leftrightarrow s)) \to (\sim p \wedge s).$$

III. Найти все простые гипотезы формул

1. $(p \nleftrightarrow q) \vee (p \wedge q)$.

2. $((p \wedge \sim q) \to r) \to (r \vee q)$.

IV. Алхимик, посаженный в тюрьму за ересь, последовательно получил шесть секретных сообщений, которые были закодированы с помощью овощей, вложенных в суп; они касались его намерения превратить свинец в золото.

Первое сообщение. Ваше намерение превратить свинец в золото будет осуществлено; королева утвердит вашего зятя настоятелем к 1 апреля 1457 г.; ваше обвинительное заключение будет передано настоятелю к этому времени.

Второе сообщение. Ваше намерение превратить свинец в золото не будет осуществлено; королева не утвердит вашего зятя настоятелем к 1 апреля 1457 г.; обвинительное заключение не будет передано настоятелю.

Третье сообщение. Ваше намерение превратить свинец в золото будет осуществлено; королева утвердит вашего зятя настоятелем к 1 апреля 1457 г.; обвинительное заключение не будет передано настоятелю.

Четвертое сообщение. То что следует далее, неверно. Или ваше намерение превратить свинец в золото будет осуществлено, или королева утвердит вашего зятя настоятелем к 1 апреля 1457 г.; обвинительное заключение не будет передано.

Пятое сообщение. По крайней мере одно из предыдущих сообщений истинно.

Шестое сообщение. Полученная вами информация абсолютно надежна.

Как мог бы алхимик методом приведения к сокращенной ДНФ наилучшим образом упростить всю полученную им информацию? Выразить ответ формулой, содержащей знак эквивалентности (см.: Калбертсон Дж. Т. Математика и логика цифровых устройств. М., 1965, с. 215—216).

Глава III

ЕСТЕСТВЕННЫЙ ВЫВОД В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 16. Понятие логического вывода

Когда в обычных рассуждениях мы выводим следствия из посылок, подыскиваем посылки (гипотезы), из которых может быть выведено некоторое предложение, находим доказательства или опровержения и т. п., то во всех этих случаях наши рассуждения развертываются в соответствии с правилами логического следования, если, разумеется, мы вольно или невольно не нарушаем их, делая ошибки в рассуждениях.

Правила логического следования отражают определенные отношения вещей. Эти правила сложились и складываются в процессе практической деятельности людей. «... **Практическая деятельность человека миллиарды раз должна была приводить сознание человека к повторению разных логических фигур, дабы эти фигуры могли получить значение аксиом**»[5].

Как формы выражения логических законов, тождественно-истинные формулы, или логические тождества, используются для обоснования правил логического следования. С точки зрения самой процедуры их обоснования особое значение имеет способ представления формул в виде так называемых кратных импликаций.

Кратной импликацией называется формула вида

$$A_1 \to (A_2 \to \ldots (A_n \to C) \ldots) \qquad (*)$$

Формула (*) читается так: если $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то C.

Члены кратной импликации, обозначенные в (*) посредством $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются антецедентами, а член C — консеквентом.

При $n = 1$ имеем схему однократной (обычной) импликации

$$A_1 \to C;$$

при $n = 2$ — схему двукратной импликации

$$A_1 \to (A_2 \to C);$$

при $n = 3$ — схему трехкратной импликации

$$A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to C))$$

и т. д.

---

[5] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 172.

При $n=0$ считаем, что формула, построенная по схеме (*) кратной импликации, совпадает с формулой **C**. В этом случае мы имеем дело с так называемой нулькратной, или, как еще говорят, «вырожденной» импликацией. Таким образом, нулькратная импликация содержит консеквент и не содержит (или содержит нуль) антецедентов.

Понятно, что любую формулу, независимо от того, содержит она знак импликации в качестве главного логического знака или нет, можно рассматривать как кратную импликацию.

В дальнейшем важно уметь анализировать формулу с помощью схемы кратной импликации. Этот анализ может иметь различную глубину, в зависимости от того, какие части анализируемой формулы рассматриваются в качестве антецедентов $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ и консеквента **C** в схеме кратной импликации. Так, формулу

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$$

можно рассматривать в качестве однократной импликации, т. е. как построенную по схеме

$$\mathbf{A}_1 \to \mathbf{C}$$

Очевидно, что в этом случае мы в качестве $\mathbf{A}_1$ берем формулу

$$((p \to q) \wedge (q \to r)),$$

а в качестве **C**

$$(p \to r).$$

Но если в качестве $\mathbf{A}_1$ взять

$$((p \to q) \wedge (q \to r)),$$

в качестве $\mathbf{A}_2$

$$p$$

и в качестве **C**

$$r,$$

то формула

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$$

рассматривается теперь уже как двукратная импликация, т. е. как формула вида

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \mathbf{C}).$$

Ясно, что для нее неосуществим более тонкий анализ по схеме кратной импликации. Но возможен еще более грубый анализ, если всю анализируемую формулу рассматривать в качестве **C**, т. е. в качестве нулькратной импликации, не учитывая того, что она содержит знак импликации в качестве главного логического знака.

Между тем формулу $p \wedge (q \vee (\sim p \to r))$ можно рассматривать только в качестве нулькратной импликации.

При анализе формулы по схеме кратной импликации следует обращать внимание на расположение скобок. Так, каждая из приводимых ниже формул

$$((p \to q) \to p) \to q,$$

$$(p \to q) \to (p \to q)$$

может быть представлена в виде

$$\mathbf{A}_1 \to \mathbf{C},$$

но только вторая — в виде

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \mathbf{C}).$$

Таким образом, проанализировать формулу **F** по схеме кратной импликации значит для данной формулы подобрать схему

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ \ldots\ (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}) \ldots)$$

с некоторым подходящим значением n и каждому $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, **C** поставить в соответствие подформулы формулы **F** так, что, заменяя $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, **C** сопоставленными им подформулами, мы снова получаем анализируемую формулу.

Анализ формулы **F** по схеме кратной импликации мы назовем *предельным*, если букве **C** в этой схеме ставится в соответствие подформула формулы **F**, не содержащая знака $\to$ в качестве главного логического знака. Заметим, что в дальнейшем нам чаще придется прибегать к предельному анализу, чем ограничиваться более грубым анализом формулы по схеме кратной импликации.

В силу естественно сложившихся методов рассуждения при осуществлении процедуры обычного (неформального) доказательства, особенно в математике и других точных науках, доказываемые предложения, или тезисы доказательств, приводят, как правило, к форме условного предложения. Их называют теоремами. В этой связи употребляется еще и термин лемма. К леммам относятся вспомогательные предложения, используемые в доказательствах теорем. В теореме различают *условие* (или *допущения*) — часть, стоящую после слова «если» и перед словом «то», и *заключение* — часть стоящую после слова «то». Как явствует из способа чтения кратной импликации, формула такого вида является аналогом условного предложения; причем ее антецеденты отвечают пунктам условия, а консеквент — заключению данного предложения. В свою очередь описанный выше анализ формулы по схеме кратной импликации служит аналогом процедуры выявления в доказываемом предложении условий и заключения.

С помощью табличного метода легко убедиться, что кратная импликация истинна во всех случаях, кроме того, когда каждый из ее антецедентов истинен, а консеквент ложен.

Таким образом, если краткая импликация тождественно-истинна, то во всех строках ее таблицы, где каждому антецеденту приписывается логическое значение «истинно», консеквенту приписывается то же значение.

Отсюда становится понятным, что тождественно-истинная краткая импликация определяет некоторое правило логически корректного перехода, иначе говоря, правило логического следования, от посылок, имеющих структуру ее антецедентов, к заключению, имеющему структуру ее консеквента.

В применении правила логического следования, очевидно, заключение «наследует» истинность посылок в том смысле, что оно оказывается истинным во всех случаях, когда истинна каждая посылка данного правила. Если же в результате корректного применения правила следования, мы приходим к ложному заключению, то это означает, что хотя бы одна из посылок данного применения правила ложна.

Таким образом, одна из важных гносеологических (познавательных) функций логических тождеств рассматриваемого типа состоит в том, что они гарантируют получение новых истин из уже известных. «Если наши предпосылки верны и если мы правильно применяем к ним законы мышления, то результат должен соответствовать действительности, точно так же как вычисление в аналитической геометрии должно соответствовать геометрическому построению, хотя то и другое представляют собой совершенно различные методы».[6]

Очевидно, что сама по себе логическая корректность (правильность) рассуждения еще не является достаточным условием истинности получаемых результатов: правила следования обеспечивают истинность выводимых следствий при условии, что посылки истинны. Если нам неизвестно, истинны ли посылки, то и в данном случае мы можем выводить из них следствия, но относительно этих следствий также неизвестно, истинны они или нет. Если в дальнейшем выяснится, что полученное логически корректным путем следствие ложно, то это означает, что хотя бы одна из посылок ложна. Если же будет установлено, что следствие истинно, то хотя это и не говорит об истинности посылок, тем не менее в определенных условиях данное обстоятельство можно рассматривать как свидетельство в пользу истинности посылок, из которых получено указанное следствие.

Тем самым логические рассуждения способствуют применению критерия практики для проверки гипотез посредством проверки выводимых из них следствий и дальнейшему превращению гипотез в теорию. Но правила следования играют также известную роль в подыскании гипотез и в процессах научного объяснения, поскольку возможно «применение» дедуктивных правил в обратном порядке — от заключений к посылкам. В этом слу-

[6] Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 629.

чае при наличии некоторого исходного знания, из которого не следует данное предложение, мы, используя правила следования, как бы заполняем пробел недостающими посылками, необходимыми для следования из исходного знания рассматриваемого предложения.

В логике правила следования записываются в виде фигур рассуждения

$$\frac{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,}{C},$$

которые читаются так: из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ следует (или выводится) C. Члены $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *посылками*, а член C называется *заключением* данной фигуры. Но, конечно, не всякая фигура такого вида является правилом следования. Это понятие раскрывается в приводимом ниже определении.

Определение правила логического следования. Фигура

$$\frac{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n}{C}$$

называется *корректной* фигурой, или *правилом следования*, если формула вида

$$A_1 \to (A_2 \to \ \ldots\ (A_n \to C) \ldots)$$

есть логическое тождество.

Таким образом, для проверки корректности некоторой фигуры рассуждения, нужно образовать кратную импликацию, сделав посылки фигуры антецедентами, а заключение фигуры — консеквентом этой импликации, и выяснить, является ли полученная этим путем формула тождественно-истинной.

Для выяснения данного вопроса очевидно нет необходимости строить полную таблицу. Можно ограничиться только фрагментом, который содержит столбцы для каждого антецедента и консеквента испытываемой кратной импликации. Сама же процедура ее проверки на тождественную истинность состоит в следующем.

Рассматриваем только те строки таблицы, где под каждым антецедентом стоит символ логического значения «истинно». Тогда: 1) если во всех рассматриваемых строках под консеквентом будет написан также символ логического значения «истинно», то кратная импликация является логическим тождеством и (по определению) соответствующая ей фигура корректна, т. е. представляет правило логического следования; 2) если же среди рассматриваемых строк найдется хотя бы одна, в которой под консеквентом стоит символ логического значения «ложно», то кратная импликация не есть логическое тождество, а соответствующая ей фигура некорректна.

Понятно, что описанная процедура позволяет испытывать на корректность фигуры рассуждения, минуя фактическое построение соответствующей кратной импликации.

Предлагаем читателю проверить корректность следующих фигур:

$$\text{МП}\quad \frac{A \quad A \to B}{B};$$

$$\text{ВК}\quad \frac{A \quad B}{A \wedge B};\quad \text{УК}\quad \frac{A \wedge B}{A},\quad \frac{A \wedge B}{B};$$

$$\text{ВД}\quad \frac{A}{A \vee B},\quad \frac{B}{A \vee B};\quad \text{УД}\quad \frac{A \vee B \quad A \to C \quad B \to C}{C}.$$

Правило МП — это уже известный читателю модус поненс. Словесно это правило можно сформулировать так: из импликации и формулы, совпадающей с ее антецедентом, следует формула, совпадающая с консеквентом данной импликации.

Заметим, что фигура

$$\frac{B \quad A \to B}{A},$$

напоминающая МП, является некорректной. В этом легко убедиться, рассмотрев таблицу для знака импликации. Действительно, там мы найдем строку, где посылки данной фигуры истинны, а заключение ложно. Одна из типичных логических ошибок, известная под названием «ошибка от утверждения следствия (консеквента) к утверждению основания (антецедента)» связана с применением этой некорректной фигуры.

Правило ВК означает, что конъюнкция следует из любых двух формул и называется введением конъюнкции.

Правило ВД, состоящее из двух фигур, означает, что дизъюнкция следует из формулы, совпадающей с одним из ее членов (дизъюнктов) и называется введением дизъюнкции.

Правило УК, также состоящее из двух фигур, означает, что из конъюнкции следует формула, совпадающая с одним из ее членов (конъюнктов) и называется правилом удаления конъюнкции.

Наконец, правило УД[7] называется правилом удаления дизъюнкции и означает, что из двух импликаций, консеквен-

---

[7] В традиционной логике оно известно под названием «простая конструктивная дилемма».

ты которых одинаковы, и дизъюнкции формул, совпадающих с антецедентами этих импликаций, следует формула, совпадающая с консеквентом импликаций.

Пример рассуждения по правилу УД:

Если междометия выражают чувства, то они несут информацию; если междометия выражают волевые побуждения, то они также несут информацию. Но междометия выражают чувства или междометия выражают волевые побуждения. Следовательно, междометия несут информацию.

Читателю предоставляется также установить корректность следующих фигур:

$$\text{МТ}\quad \frac{A \to B \quad \sim B}{\sim A}, \quad \frac{A \to \sim B \quad B}{\sim A};$$

$$\text{УОК}\quad \frac{\sim (A \wedge B) \quad A}{\sim B}, \quad \frac{\sim (A \wedge B) \quad B}{\sim A};$$

$$\text{УД/О}\quad \frac{A \vee B \quad \sim A}{B}, \quad \frac{A \vee B \quad \sim B}{A},$$

$$\frac{\sim A \vee B \quad A}{B}, \quad \frac{A \vee \sim B \quad B}{A}.$$

Правило МТ — это модус толленс.[8] Правило УОК называется удалением отрицания конъюнкции. Наконец, правило УД/О, состоящее из четырех фигур, мы называем удалением дизъюнкции посредством отрицания.

Рассмотренные правила следования мы привели здесь главным образом в иллюстративных целях, не претендуя на систематическое рассмотрение, которое откладываем до следующих параграфов.

Применяя правила следования, мы можем из исходных формул, называемых посылками, или допущениями, получать (выводить) новые формулы, логически следующие из исходных, путем построения последовательностей формул, в которых каждая формула или является посылкой, или же следует из предшествующих формул по одному из правил следования.

Такого рода последовательности формул называются формальными выводами. Они служат в логике моделями, на которых изучаются закономерности обычных логических рассуждений.

---

[8] Modus tollens (лат.) — отрицающий способ.

П р и м е р. Приводимая ниже последовательность из восьми формул

$$\left.\begin{array}{l}1.\ (p_1 \wedge p_2) \to q\\ 2.\ p_1 \wedge r\\ 3.\ r \to p_2\end{array}\right\}\quad \text{посылки;}$$

4. r	УК (2);
5. p_2	МП (4, 3);
6. p_1	УК (2);
7. $p_1 \wedge p_2$	ВК (6, 5);
8. q	МП (7, 1)

есть вывод из исходных формул (посылок) 1—3 формулы 8 (заключения данного вывода), при построении которого используются правила МП, ВК, УК.

Рассматриваемый вывод строится так. В первых трех строках записываются посылки: в строке 4 мы пишем формулу r, следующую из ранее написанной (строка 2) формулы $p_1 \wedge r$ по второй схеме правила УК, в строке 5 мы пишем формулу p_2, следующую по правилу МП из формул, стоящих в строках 3 и 4; далее, при получении формулы p_1 (строка 6) к формуле $p_1 \wedge r$ (строка 2) применяется первая схема правила УК; формула $p_1 \wedge p_2$ (строка 7) следует из формулы p_1 (строка 6) и формулы p_2 (строка 5) по правилу ВК, наконец, применяя правило МП к формулам $(p_1 \wedge p_2) \to q$ (строка 1) и $p_1 \wedge p_2$ (строка 7), пишем в последней строке формулу q.

Используя формальные выводы, как модели обычных рассуждений, можно не только проверять логическую правильность последних, но решать логические задачи с помощью аппарата правил следования.

Процедура в этом случае аналогична решению словесно-сформулированной задачи с помощью математического аппарата.

П р и м е р. Ниже дается словесная формулировка следующей логической задачи.[9]

(1) *Если теорема о сложении скоростей верна и в системе неподвижных звезд свет распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью, то на Земле скорость распространения света не по всем направлениям одинакова.* (2) *Известно, что свет в системе неподвижных звезд распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью, а в опытах установлено, что скорость распространения света и на Земле по всем направлениям одинакова.*

Что отсюда следует?

---

[9] См. сноску на с. 253.

В языке логики высказываний посылки, составляющие условие задачи, можно соответственно выразить формулами

$$(1)\quad (p \wedge q) \to \sim r, \qquad (2)\quad q \wedge r,$$

где p стоит вместо: *Теорема о сложении скоростей верна*; q — вместо: *В системе неподвижных звезд свет распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью*; r — вместо: *На Земле скорость света по всем направлениям одинакова.*

Применяя к формулам (1), (2) уже известные нам правила следования, мы строим такой формальный вывод:

1. $(p \wedge q) \to \sim r$	посылки;
2. $q \wedge r$	
3. r	УК (2);
4. $\sim (p \wedge q)$	МТ (1, 3);
5. q	УК (2);
6. $\sim p$	УОК (4, 5).

Таким образом, из посылок, написанных в строках 1—2 вывода, мы получаем в качестве следствия $\sim p$. Вспоминая, что p стоит вместо: *Теорема о сложении скоростей верна*, мы приходим к требуемому ответу на вопрос нашей словесно сформулированной задачи, а именно: *Теорема о сложении скоростей неверна.*

Приведенное выше определение вывода является эффективным в том смысле, что для любой предъявленной последовательности формул (логики высказываний) мы, пользуясь табличным методом, всегда в состоянии ответить на вопрос, является ли данная последовательность формул выводом из данных посылок (исходных формул) или нет. Однако отсутствие ссылки на конечную совокупность правил делает это определение малоинтересным даже с отвлеченно-теоретической точки зрения.

В дальнейшем мы укажем конечную совокупность логических правил, с помощью которой можно строить формальные выводы, возможно точно передающие структуру обычных логических рассуждений, иными словами, построим логическую систему (логическое исчисление) естественного вывода. С целью выяснения характерных особенностей логического строения обычных рассуждений проанализируем вначале примеры конкретных логических доказательств.

Пример. Доказывается арифметическое предложение

Если простое число k делит $m \cdot n$ и k не делит m, то k делит n.

Доказательство.

Допустим, что

(1) *простое число k делит $m \cdot n$ и не делит m.*

Тогда из (1) следует, что

(2) *k делит* $m \cdot n$.

В свою очередь из (2) и известного положения:

(3) *Если простое число k делит* $m \cdot n$, *то k делит m или n*, следует, что

(4) *k делит m или n.*

В то же время из (1) следует, что

(5) *k не делит m.*

Наконец, на основании (4) и (5) устанавливаем

(6) *k делит n.*

Рассматривая приведенное доказательство, нетрудно заметить, что оно представляет собой цепочку (последовательность) предложений, связанных отношением логического следования, и развертывается по следующей схеме:

1) доказательство начинается введением в рассмотрение условия доказываемого предложения в качестве допущения (доказательства);

2) в дальнейшем из уже имеющихся предложений, к которым всегда можно присоединить ранее установленные истины (аксиомы, ранее доказанные положения и т. п.), выводятся следствия;

3) доказательство заканчивается получением заключения доказываемого предложения.

Таким образом, можно обнаружить, что в данном доказательстве применяются два рода правил: а) правила, определяющие (более или менее подробную) схему или структуру доказательства, б) правила, по которым из уже имеющихся предложений получаются в качестве следствий новые предложения.

Правила первого рода в дальнейшем мы будем называть правилами построения доказательства. Назначение их — очерчивать, образно говоря, более или менее ясные контуры строящегося доказательства, подсказывать «идею» доказательства. Мы еще не располагаем точными в терминах логических исчислений формулировками этих правил. Ограничимся пока лишь ссылкой на то, что описательная характеристика одного из них содержится в объяснении схемы, по которой построено доказательство в приведенном примере.

Такой способ построения доказательства часто называют правилом построения прямого доказательства (путем введения допущений). Очевидно, что под его схему в качестве частного случая попадают и те доказательства, при построении которых не вводятся допущения, так что доказываемое предложение «непосредственно» выводится из ранее установленных истин.

Что касается правил второго рода, то к ним относятся уже известные нам правила логического следования. Заметим, что выше в примере можно обнаружить применение некоторых правил, схемы которых были приведены ранее.

Действительно, строка (2) получена по правилу УК (первая схема) из строки (1); строка (4) — из строк (3) и (2) по правилу МП, строка (5) — из строки (1) по правилу УК (вторая схема). Наконец, на заключительном шаге доказательства применяется правило УД/О.

Рассмотрим еще один пример конкретного доказательства, в котором применяется так называемое правило построения косвенного (апагогического) доказательства, или доказательства от противного.

Пример. Здесь доказывается предложение:

Если простое число k делит m·m, то k делит m.

Доказательство.[10]

Допустим, что

(1) *простое число k делит m·m*

и в то же время[11]

(2) *k не делит m.*

Известно,[12] что

(3) *Если простое число k делит m·m и k не делит m, то k делит m.*

Далее, из (1) и (2) следует (по правилу ВК), что

(4) *k делит m·m и k не делит m.*

Наконец, из (3) и (4) следует (по правилу МП), что

(5) *k делит m.*

Однако последнее противоречит (2).

Как и в предыдущем примере, данное доказательство начинается введением (в качестве допущения) условия доказываемого предложения, но с тем отличием, что здесь вводится еще одно допущение, — отрицание заключения доказываемого предложения. В дальнейшем, как и в прямом доказательстве, из допущений и ранее установленных истин выводятся следствия, но в отличие от прямого доказательства косвенное доказательство заканчивается обнаружением противоречия в выводе, а не выведением заключения доказываемого предложения.

Тот факт, что последняя строка во втором примере доказательства совпадает с заключением доказываемого предложения, вызван некоторыми особенностями данного конкретного доказательства и не типичен для косвенного доказательства. Вообще говоря, предложение, которым оно заканчивается, может противоречить или допущениям, или ранее установленным истинам, или следствиям из допущений и ранее установленных истин и т. п.

Сделанные выше разъяснения по поводу дедуктивных правил первого и второго родов можно кратко выразить так: если

[10] Доказательство этой теоремы приводится в «Началах» Евклида.

[11] Вводимое ниже допущение называется допущением косвенного доказательства.

[12] На этом шаге к доказательству присоединяется частный случай теоремы, установленной в предыдущем примере.

с помощью правил построения доказательства определяется схема (структура) возможного доказательства, то с помощью правил следования осуществляется заполнение свободных строк (пустых мест) в данной схеме с целью нахождения действительного доказательства.

Придадим некоторый точный смысл описательной характеристике логической структуры обычных рассуждений, которая была дана в предыдущем параграфе, ограничиваясь пока рамками логики высказываний.

С этой целью мы опишем одну логическую систему (или логическое исчисление). Средствами ее можно строить формальные доказательства, структура которых возможно точно передает логическое строение обычных рассуждений. Логические исчисления такого типа получили название систем естественного вывода, или натуральных исчислений. Впервые натуральные исчисления были изобретены независимо друг от друга польским логиком С. Яськовским и немецким логиком Г. Генценом в тридцатых годах нашего столетия.

Описываемая ниже система естественного вывода, которую мы обозначаем буквой N, является модификацией логической системы, предложенной польскими логиками Е. Слупецким и Л. Борковским.[13]

Основные правила системы N содержат:

[I] Правила логического следования:

$$\text{МП}\quad \frac{A\ \ A\to B}{B};$$

$$\text{ВК}\quad \frac{A\ \ B}{A\wedge B};\quad \text{УК}\quad \frac{A\wedge B}{A},\quad \frac{A\wedge B}{B};$$

$$\text{ВД}\quad \frac{A}{A\vee B},\quad \frac{B}{A\vee B};\quad \text{УД}\quad \frac{A\vee B\ \ A\to C\ \ B\to C}{C};$$

[II] Правила построения доказательства.

[II. 1] Правило построения прямого доказательства.

Прямое доказательство формулы (кратной импликации) вида

$$A_1\to(A_2\to\ \dots\ (A_n\to C)\dots)\qquad (*)$$

строится согласно следующему предписанию.

На любом шаге построения можно написать:

1) одну из формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ в качестве допущения;

2) формулу, следующую из ранее написанных формул по одному из правил логического следования,

3) ранее доказанную формулу.

[13] См.: Слупецкий Е., Борковский Л. Элементы математической логики и теория множеств. М., 1965.

Прямое доказательство формулы (*) считается построенным, если в соответствии с пп. 1)—3) получена последовательность формул, оканчивающаяся формулой **C**.

Пока еще у читателя свежо в памяти правило [II. 1], мы, не заканчивая описания всех правил системы, приведем в качестве примера несколько доказательств.

Пример. Ниже построено прямое доказательство формулы

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r).$$

Доказательство.

	1. $(p \to q) \wedge (q \to r)$	допущ.
	2. $p \to q$	УК (1);
(I)	3. p	допущ.;
	4. q	МП (3, 2);
	5. $q \to r$	УК (1);
	r	МП (4, 5).

Мы не случайно не пронумеровали последнюю строку, обозначая тем самым, что доказательство закончено. Этот прием систематически используется и в дальнейшем.

Как можно видеть из приведенного доказательства, для анализа доказываемой формулы мы выбрали схему кратной импликации, имеющую вид

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \mathbf{C}),$$

поставив в соответствие букве $\mathbf{A}_1$ формулу $(p \to q) \wedge (q \to r)$, букве $\mathbf{A}_2$ — формулу p, и наконец, букве **C** — формулу r. В доказательстве строка 1 заполнена согласно п. 1) правила [II. 1] формулой

$$(p \to q) \wedge (q \to r).$$

Далее, применив первую схему правила УК, мы написали в строке 2 формулу

$$p \to q$$

согласно п. 2) данного правила после этого, написав формулу

$$p$$

согласно п. 1), мы заполнили согласно п. 2) строку 4 формулой

$$q,$$

следующей из формул, написанных в строках 2, 3 по правилу МП. Затем, в соответствии с п. 2) в строке 5 мы написали формулу

$$q \to r,$$

следующую по второй схеме правила УК из формулы в строке 1. Наконец, заключительный шаг состоит в заполнении согласно п. 2) последней строки формулой

$$r,$$

следующей по правилу МП из формул, написанных в строках 5, 4.

Таким образом построена последовательность из шести формул, которая согласно критерию, сформулированному во второй части правила [II. 1], есть прямое доказательство формулы

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r).$$

Ниже приводится прямое доказательство формулы

$$q \to q.$$

Доказательство.

q допущ.

На первый взгляд оно кажется странным, поскольку состоит всего из одной строчки. Но так и должно быть. Введя в качестве допущения формулу, совпадающую с антецедентом доказываемой импликации, мы сразу же заканчиваем доказательство, потому что консеквент доказываемой импликации совпадает с ее антецедентом, а, как мы помним, прямое доказательство заканчивается получением последовательности формул, оканчивающейся формулой, совпадающей с консеквентом доказываемой формулы. (Последовательность здесь состоит всего из одной формулы.)

Данное доказательство, естественно, тривиально, и странным оно показалось потому, что в обычной речи мы стремимся избегать банальностей. Но тем не менее, если бы мы не располагали доказательством, на которое только что потратили столько слов, то не смогли бы построить приводимое ниже доказательство, которое уже не кажется столь тривиальным.

$$(p \vee q) \to ((p \to q) \to q).$$

Доказательство.

$$\text{(II)}\quad \begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} 1.\ p \vee q \\ 2.\ p \to q \end{array}\right\} & \text{допущ.;} \\ 3.\ q \to q & \text{р. д. ф.}^{14} \\ \quad\ q & \text{УД (1, 2, 3).} \end{array}$$

Предоставляем читателю самостоятельно разобраться, по какой схеме анализируется доказываемая формула, почему здесь при построении доказательства было выбрано правило УД и как возникла идея использовать $q \to q$ в качестве ранее доказанной формулы?

---

[14] Здесь и в дальнейшем р. д. ф. — ранее доказанная формула.

Нетрудно видеть, что прямое доказательство кратной импликации осуществляется через построение вывода консеквента доказываемой формулы из ее антецедентов, вписываемых в качестве допущений путем применения правил следования с использованием, возможно, ранее доказанных формул.

Естественно, что при построении доказательства нулькратной импликации, п. 1) правила [II. 1] не применяется и доказываемая формула выводится «непосредственно» из ранее доказанных формул, возможность использования которых предусматривается п. 2) правила [II. 1].

Для формулировки еще одного правила построения доказательства потребуется следующее понятие. Назовем две формулы *противоречащими*, если одна из них может быть получена из другой приписыванием слева знака $\sim$.

[II. 2] *Правило построения косвенного (апагогического) доказательства.*

Косвенное доказательство формулы (*) строится согласно следующему предписанию.

На любом шаге построения можно написать:

1) одну из формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ в качестве допущения;

1а) формулу, противоречащую формуле $\mathbf{C}$;

2) формулу, следующую из ранее написанных форм по одному из правил логического следования;

3) ранее доказанную формулу.

Косвенное доказательство формулы (*) считается построенным, если в соответствии с пп. 1)—3), включая и п. 1а), получена последовательность формул, содержащая пару противоречащих формул и оканчивающаяся одной из них.

Данное правило отличается от правила [II. 1] наличием дополнительного п. 1а) и критерием окончания доказательства. Таким образом, косвенное доказательство кратной импликации осуществляется путем выведения из антецедентов и формулы, противоречащей консеквенту доказываемой формулы, противоречия, т. е. некоторой формулы $\mathbf{B}$ и ее отрицания $\sim \mathbf{B}$ (не обязательно в таком порядке) с помощью правил следования и с использованием, быть может, ранее доказанных формул.

Пример. Рассмотрим несколько косвенных доказательств.

$$((p \to q) \land \sim q) \to \sim p.$$

Доказательство.

	1. $(p \to q) \land \sim q$	допущ.;
	2. p	допущ. косв. док.;
(III)	3. $p \to q$	УК (1);
	4. q	МП (2, 3);
	5. $\sim q$	УК (1);

Пртврч.: 4, 5.

«Пртврч» — сокращение слова «противоречие». Написанием этого сокращения с указанием строк, где написаны формулы, образующие пару противоречащих формул, здесь и в дальнейшем мы отмечаем, что косвенное доказательство закончено.

$$\sim p \rightarrow (p \rightarrow q).$$

Доказательство.

(IV)
1. $\sim p$
2. p допущ.;

Пртврч.: 1, 2.

Это — тривиальное косвенное доказательство. Введя допущения, мы сразу же получаем противоречие; поэтому нет никакой необходимости вводить в него еще $\sim q$ в качестве допущения косвенного доказательства, хотя ничто этому не препятствует. Как мы увидим ниже, данное доказательство играет существенную роль в построении дальнейших (нетривиальных) доказательств.

$$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p.$$

Доказательство.

(V)

1.	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	допущ.
2.	$\sim p$	допущ. косв. док.
3.	$\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$	р. д. ф.
4.	$p \rightarrow q$	МП (2, 3)
5.	p	МП (4, 1)
	Пртврч.: 5, 2.	

Построив это доказательство, мы проанализировали доказываемую формулу по схеме однократной импликации, т. е. рассматривали ее как формулу вида $\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{C}$. Но ее нельзя представить в виде $\mathbf{A}_1 \rightarrow (\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{C})$.

Далее, в доказательстве (III) допущение косвенного доказательства мы образовали, стерев знак $\sim$ (т. е. знак отрицания) перед консеквентом доказываемой кратной импликации. Здесь же допущение косвенного доказательства образуется путем приписывания знака $\sim$ к консеквенту доказываемой формулы.

В заключение рассмотрим еще одно доказательство

$$((p \vee q) \wedge \sim p) \rightarrow q.$$

Доказательство.

(VI)

1.	$(p \vee q) \wedge \sim p$	допущ.
2.	$p \vee q$	УК (1)
3.	$\sim p$	УК (1);
4.	$\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$	р. д. ф.;
5.	$p \rightarrow q$	МП (3, 4);
6.	$q \rightarrow q$	р. д. ф.;
	q	УД (2, 5, 6)

Заметим, что хотя данное доказательство (по форме) является прямым, но оно отличается от приведенных выше прямых доказательств тем, что доказательство формулы, вписанной в его четвертую строку в качестве ранее доказанной, является косвенным.

Вообще говоря, доказательство в системе N связано с конечной системой, или совокупностью доказательств, упорядоченных некоторым естественным образом. Именно доказательству непосредственно предшествуют ранее построенные доказательства тех (и только тех) формул, которые вписаны в данное доказательство согласно п. 3) правил построения доказательства; в свою очередь каждому из ранее построенных доказательств могут предшествовать свои, ранее построенные доказательства и так до тех доказательств, которые уже не имеют предшествующих доказательств. Их мы будем называть элементарными доказательствами.

Среди прямых доказательства имеет смысл выделить такие, которые не имеют и косвенных доказательств в числе предшествующих (не обязательно непосредственно). Доказательство этого рода мы будем называть чисто прямыми. Все прямые доказательства, рассмотренные в примерах, за исключением (VI) являются чисто прямыми. В дальнейшем формулу, доказательство которой построено, будем называть тезисом данного доказательства, а доказательства, тезисы которых совпадают, будем называть одноименными.

Завершая описание системы N, мы введем следующее определение доказуемой формулы. Формула называется доказуемой формулой, или логической теоремой (системы N), если можно построить доказательство данной формулы (по правилам системы N).

Кроме того, мы принимаем следующее определение знака эквивалентности:

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B} \underset{\mathrm{df}}{=} (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}).$$

Оно означает, что выражение, стоящее слева от знака $\underset{\mathrm{df}}{=}$ (знака равенства по определению), рассматривается как сокращенная запись выражения, стоящего справа от этого знака. Согласно данному определению, если в формуле имеется вхождение выражения из правой части данного определения, то его можно заменять на вхождение выражения из его левой части (и наоборот).

Из определения знака $\leftrightarrow$ непосредственно следует, что правила

$$\text{ВЭ}\ \frac{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}\quad \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}}{\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}}, \qquad \text{УЭ}\ \frac{\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}}{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}},\ \frac{\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}}{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}},$$

называемые соответственно введением и удалением эквивалентности представляют собой частные случаи правил ВК и УК.

Пример рассуждения по правилу ВЭ.

Если данное число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3. Если данное число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6. Следовательно, данное число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3.

Осуществляя поиск логических доказательств, мы руководствуемся догадками, идеями и т. п. относительно плана возможного доказательства какого-либо тезиса и способов превращения этого плана в действительное доказательство. Иными словами, поиск логического доказательства направляется эвристическими принципами мышления, или эвристиками.

В зависимости от роли, которую играют эвристические принципы в поиске доказательства, их можно подразделить на две группы. К первой группе относятся принципы, посредством которых, на основании анализа тезиса искомого доказательства, выбирается план (схема) доказательства, иными словами формируется «идея доказательства», подыскиваются ранее доказанные предложения или выявляются вспомогательные предложения (леммы), в свою очередь нуждающиеся в доказательствах. Эвристические принципы этой группы мы называем принципами анализа.

Ко второй группе относятся принципы, посредством которых план искомого доказательства превращается в конкретное доказательство. Этот процесс протекает в форме некоторого синтеза, основанного на результатах предшествующего анализа. Эвристические принципы этой группы естественно назвать принципами синтеза.

Нетрудно понять, что описанные выше логические правила «работают» в поиске доказательства как эвристики, иначе говоря, выполняют функции эвристических принципов мышления; при этом принципам анализа более или менее соответствуют правила построения доказательства, а принципам синтеза — правила логического следования.

Таким образом, эвристический поиск логических доказательств представляет собой аналитико-синтетическую процедуру, которая, как мы видели, имеет логическую природу. Заметим, что поиск логического доказательства практически не обязательно связан с точной формулировкой тезиса искомого доказательства. Часто мы располагаем лишь приближенной характеристикой — «смутной идеей тезиса». В этом случае логические правила могут быть использованы для исправления или уточнения первоначальной формулировки тезиса.

§ 17. Производные правила

Сформулированные выше основные правила системы N не исчерпывают всех способов логических рассуждений, осуществимых средствами логики высказываний. Но, как мы убедимся окончательно в дальнейшем, все остальные логические правила в этой области логически можно свести к этим основным. Для этого нам понадобится точное понятие производного правила. Но прежде мы введем следующее понятие равнообъемности логических систем. Две логические системы называются равнообъемными, если любая формула, доказуемая в одной из них, доказуема и в другой, и обратно. Таким образом, равнообъемные системы определяют один и тот же класс теорем (доказуемых формул). Равнообъемные системы иначе называют эквивалентными или эквиполентными.

Определение производного правила. Правило называется производным в логической системе, если добавление к ней данного правила дает равнообъемную ей систему.

Другими словами, применение производных правил не увеличивает класса формул, доказуемых в соответствующей логической системе. Нетрудно понять, что обоснование производных правил должно состоять в предъявлении эффективного метода, пользуясь которым любое доказательство некоторой формулы, содержащее применение производных правил, можно преобразовать в доказательство той же формулы, построенное с помощью лишь основных правил.

Таким образом, при построении доказательств теоретически можно обойтись без производных правил. Но отказ от их применения рано или поздно приведет к тому, что поиск доказательств станет не осуществимым с практически приемлемой затратой времени, сил и средств, когда нам придется иметь дело с труднообозримыми логическими конструкциями. Эти трудности, однако, можно преодолеть, если пользоваться производными правилами, так как в них аккумулируется прошлый логический опыт. Вследствие этого в ходе поиска доказательств производные правила позволяют в сокращенной форме проводить анализ исходных данных на большую (по сравнению с основными правилами) глубину и существенно упрощают синтез искомых доказательств.

Производными могут быть как правила следования, так и правила построения доказательства.

Нетрудно видеть, что правило [II. 1] построения прямого доказательства, хотя и принимается в системе N в качестве основного, фактически производно относительно правила [II. 2] построения косвенного доказательства. В самом деле, любое прямое доказательство можно тривиально перестроить в косвенное доказательство той же формулы. С этой целью достаточно в прямое доказательство вписать отрицание его конечной формулы. Таким образом, правило [II. 1] можно было бы вычеркнуть из списка основных правил, но это не является желательным, если мы заинтересованы в получении формальных моделей, отображающих структуру обычных логических рассуждений. В дальнейшем мы еще вернемся к этому вопросу.

Для того чтобы установить, что правило следования, представленное фигурой

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{C} \qquad (*)$$

производно, достаточно найти доказательство формулы вида

$$A_1 \to (A_2 \to \ \ldots \ (A_n \to C) \ldots), \qquad (**)$$

т. е. кратной импликации, антецедентами которой служат посылки, а консеквентом служит заключение фигуры (*).

В самом деле, если в каком-либо доказательстве (некоторой формулы) применяется производное правило (*), то в данном доказательстве, скажем, k-я строка содержит формулу C, полученную по правилу (*) из написанных в предшествующих строках (не обязательно в таком порядке) формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Нетрудно видеть, что если мы построим доказательство формулы (**), то, стерев в предшествующем доказательстве стоящую в k-й строке формулу C и вставив («втиснув») в образовавшийся пробел следующую колонку формул:

$$\begin{array}{ll} k. & A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to \ \ldots \ (A_n \to C) \ldots)). \\ k+1. & A_2 \to (A_3 \to \ \ldots \ (A_n \to C) \ldots) \\ & \vdots \\ k+n-1. & A_n \to C \\ k+n. & C, \end{array}$$

мы получим новое доказательство той же формулы. Понятно, что в этом новом доказательстве формула в $(k+1)$-й строке следует по правилу МП из формулы (**) в k-й строке и формулы A_1, написанной где-то выше; в свою очередь формула в $(k+2)$-й строке следует по правилу МП из формулы в $(k+1)$-й строке и формулы A_2, стоящей также где-то выше k-й строки и так до $(k+n)$-й строки, где появляется формула C (стертая в прежнем доказательстве).

В дальнейшем, правило следования (*) мы называем *производным относительно формулы* (**), если установлено, что данная формула есть логическая теорема.

Покажем, что формула следующего вида, называемая *законом условного силлогизма*, является теоремой (в системе N).

T1. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.

Доказательство.

$$\begin{array}{lll} 1. & A \to B & \left.\right\} \\ 2. & B \to C & \text{допущ.;} \\ 3. & A & \left.\right\} \\ 4. & B & \text{МП } (1, 3); \\ & C & \text{МП } (2, 4). \end{array}$$

Строго говоря, выше было приведено не доказательство, а схема доказательства, по которой можно построить любое доказательство формулы вида T1, заменяя надлежащим образом метапеременные **A**, **B**, **C** конкретными формулами. В дальнейшем, мы также вместо «схема доказательства» пишем «доказательство», когда возможные недоразумения исключаются контекстом. Заметим, что в схемах доказательств (как и в схемах формул) фигурируют прямые «полужирные» буквы латинского алфавита.

Относительно T1 производно п р а в и л о (у с л о в н о г о) с и л л о г и з м а

$$\text{Сил.}\quad \frac{\mathbf{A}\to\mathbf{B}\quad \mathbf{B}\to\mathbf{C}}{\mathbf{A}\to\mathbf{C}}.$$

Предоставляем читателю самостоятельно убедиться, что производно следующее обобщение правила МП — «обобщенный модус поненс»:

$$\text{МП}'\quad \frac{\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots\ \mathbf{A}_n;\ \mathbf{A}_1\to(\mathbf{A}_2\to\ \ldots(\mathbf{A}_n\to\mathbf{C})\ldots)}{\mathbf{C}}.$$

Данным правилом мы будем широко пользоваться в дальнейшем.

Очевидно, что в обосновании производных правил можно использовать ранее установленные производные правила. Так, с помощью правила МП′ можно легко получить следующее обобщенное правило силлогизма:

$$\text{Сил.}'\quad \frac{\mathbf{A}_1\to(\mathbf{A}_2\to(\mathbf{A}_n\to\mathbf{B})\ldots)\quad \mathbf{B}\to\mathbf{C}}{\mathbf{A}_1\to(\mathbf{A}_2\to\ \ldots(\mathbf{A}_n\to\mathbf{C})\ldots)}.$$

§ 18. Чисто прямое доказательство

Фрагмент системы N, определяемый правилами [I] логического следования и правилом [II. 1] построения прямого доказательства представляет собой один из вариантов исчисления п о л о ж и т е л ь н о й (или позитивной) логики. В данной теории изучаются логические законы и правила, не содержащие знака отрицания. С помощью этих законов и правил строятся чисто прямые доказательства. Поэтому положительную логику можно было также назвать логикой ч и с т о п р я м о г о д о к а з а т е л ь с т в а.

Перейдем к рассмотрению теорем и производных правил положительной логики.

T2. $\mathbf{A}_1\to(\mathbf{A}_2\to\ \ldots(\mathbf{A}_n\to\mathbf{A}_i)\ldots)$, где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$\mathbf{A}_i$ допущ.

Как видно, оно состоит из единственной формулы, которая входит в T2 в качестве антецедента и потому согласно п. 1) правила [II. 1] вписывается в доказательство в качестве допущения. Но так как данная формула совпадает с формулой, входящей в T2 также и в качестве консеквента, то полученная последовательность из одной формулы $\mathbf{A}_i$ согласно [II. 1] является доказательством формулы T2.

Частными случаями T2 являются следующие теоремы:

T3. $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$.

T4. $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$.

По-видимому, невозможно придумать более тривиальную теорему, чем T2 или ее частные случаи. Тем не менее трудно представить без них строгое построение логической теории. Они, как мы увидим, играют весьма существенную роль в обосновании принципов логики.

В дальнейшем мы предоставляем читателю в порядке упражнения находить опущенные доказательства теорем, приводимых в этом и следующих параграфах.

T5. $(\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})) \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C}))$.

T6. $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$.

T7. $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \to \mathbf{A}$.

T8. $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \to \mathbf{B}$.

T9. $(\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to ((\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \mathbf{C}))$.

T10. $\mathbf{A} \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$.

T11. $\mathbf{B} \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$.

T12. $(\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to ((\mathbf{B} \to \mathbf{D}) \to ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to (\mathbf{C} \vee \mathbf{D})))$.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \mathbf{A} \to \mathbf{C} \\ 2. & \mathbf{B} \to \mathbf{D} \\ 3. & \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \end{array}\right\} \quad \text{допущ.;}$$

4.	$\mathbf{C} \to (\mathbf{C} \vee \mathbf{D})$	р. д. ф., T10;
5.	$\mathbf{D} \to (\mathbf{C} \vee \mathbf{D})$	р. д. ф., T11;
6.	$\mathbf{A} \to (\mathbf{C} \vee \mathbf{D})$	Сил. (1, 4);
7.	$\mathbf{B} \to (\mathbf{C} \vee \mathbf{D})$	Сил. (2, 5);
	$\mathbf{C} \vee \mathbf{D}$	УД (3, 6, 7).

Относительно T12 производно правило

$$\text{Дил}_2. \quad \frac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \quad \mathbf{A} \to \mathbf{C} \quad \mathbf{B} \to \mathbf{D}}{\mathbf{C} \vee \mathbf{D}},$$

которое в традиционной логике известно под названием сложной конструктивной дилеммы. Правило $Дил_2$ позволяет из двух импликаций и дизъюнкции формул, совпадающих с их антецедентами, получить дизъюнкцию формул, совпадающих с консеквентами этих импликаций. Мы уже говорили, что основное правило УД называется простой конструктивной дилеммой. В нумерации дилемм мы присваиваем ему обозначение: $Дил_1$.

Нахождение доказательств логических теорем существенно облегчается применением следующих двух производных правил построения доказательства. Первое из них называется: доказательство по частям (сокращенно: ДЧ), а второе — доказательство разбором случаев (сокращенно: РС).

Правило ДЧ формулируется так: для того чтобы доказать формулу вида

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ldots (\mathbf{A}_n \to (\mathbf{C}_1 \wedge \mathbf{C}_2)) \ldots), \qquad (*)$$

достаточно построить:

1) доказательство формулы

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ldots (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_1) \ldots) \qquad (**)$$

(часть 1) и

2) доказательство формулы

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ldots (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_2) \ldots) \qquad (***)$$

(часть 2).

Данное правило легко обосновывается с помощью правила [II. 1] построения прямого доказательства и правил УК и МП′. Действительно, если построены доказательства формул (**) и (***), то, делая последние строками нового доказательства согласно п. 3) правила [II. 1], введя в качестве допущений формулы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ согласно п. 1) этого же правила и пользуясь далее п. 3) правила [II. 1], мы с помощью МП′ получаем формулы $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, из которых в свою очередь по ВК выводим формулу

$$(\mathbf{C}_1 \wedge \mathbf{C}_2).$$

Получением данной формулы мы завершаем построение требуемого доказательства формулы (*).

Согласно ДЧ нахождение доказательства формулы вида

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$$

сводится к построению доказательств следующих двух импликаций (прямой):

$$\mathbf{A} \to \mathbf{B}$$

и (обратной)

$$\mathbf{B} \to \mathbf{A},$$

так как $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ является по определению конъюнкцией этих импликаций, т. е. $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$.

Правило РС формулируется следующим образом: для того чтобы доказать формулу вида

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ \ldots\ (\mathbf{A}_k \to ((\mathbf{B}_1 \vee \mathbf{B}_2) \to \mathbf{C}))\ \ldots), \qquad (*)$$

достаточно построить

1) доказательство формулы

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ \ldots\ (\mathbf{A}_k \to (\mathbf{B}_1 \to \mathbf{C}))\ \ldots) \qquad (**)$$

(случай 1) и

2) доказательство формулы

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ \ldots\ (\mathbf{A}_k \to (\mathbf{B}_2 \to \mathbf{C}))\ \ldots) \qquad (***)$$

(случай 2).

Очевидно, что обоснование правила РС должно состоять в указании способа построения доказательства формулы (*) при условии, что ранее построены доказательства формул (**), (***). В самом деле, используя правило [II. 1], мы пишем формулы (**), (***) в качестве ранее доказанных и $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ в качестве допущений. Затем по МП′ мы получаем формулы

$$\mathbf{B}_1 \to \mathbf{C},$$
$$\mathbf{B}_2 \to \mathbf{C},$$

и, введя в качестве еще одного допущения формулу

$$\mathbf{B}_1 \vee \mathbf{B}_2,$$

по правилу УД пишем формулу

$$\mathbf{C}.$$

Получением этой формулы завершается построение требуемого доказательства формулы (*).

Эвристическая ценность правил ДЧ, РС состоит в том, что они позволяют сводить задачу на поиск доказательства к более простым задачам. Правило ДЧ (соответственно РС) можно применять последовательно, разбивая вводимые в рассмотрение части (случаи) в свою очередь на подчасти (подслучаи) и т. д. Правила ДЧ и РС можно также применять совместно, комбинируя их друг с другом, как это иллюстрируется ниже.

Пример. Пользуясь правилами ДЧ и РС докажем следующую формулу:

$$(p \vee (q \wedge r)) \to ((p \vee q) \wedge (p \vee r)).$$

Доказательство.

Часть 1. $(p \vee (q \wedge r)) \to (p \vee q)$.

Случай 1.1. $p \to (p \vee q)$, р. д. ф., Т10.

Случай 2.1. $(q \wedge r) \to (p \vee q)$.

1.	$q \wedge r$	допущ.
2.	q	УК (1),
	$p \vee q$	ВД (2).

Часть 2. $(p \vee (q \wedge r)) \to (p \vee r)$.

Случай 2.1. $p \to (p \vee r)$ р. д. ф., Т10.

Случай 2.2. $(q \wedge r) \to (p \vee r)$.

1. $q \wedge r$ допущ.
2. r УК (1)

$p \vee r$ ВД (2)

§ 19. Слабое косвенное доказательство

Здесь мы расширим исчисление положительной логики добавлением правила $[II.2]^{min}$ построения слабого косвенного доказательства.

Слабое косвенное доказательство формулы

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ \ldots \ (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}) \ \ldots) \qquad (*)$$

строится согласно следующему предписанию.

На любом шаге построения можно написать:

1) одну из формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ в качестве допущения.

1а) формулу $\mathbf{C}'$, полученную из $\mathbf{C}$ стиранием первого слева знака отрицания [15], в качестве допущения слабого косвенного доказательства.

2) формулу, следующую из ранее написанных формул, по одному из правил логического следования.

3) ранее доказанную формулу.

Слабое косвенное доказательство формулы (*) считается построенным, если в соответствии с пп. 1)—3), включая и п. 1а), получена последовательность формул, содержащая *формулу* $\mathbf{C}'$, пару противоречащих формул и оканчивающаяся одной из формул данной пары.

Слабое косвенное доказательство — это частный случай косвенного доказательства, характеризующийся следующими ограничительными условиями:

1) если при построении косвенного доказательства мы согласно п. 1а) могли вводить формулу, получаемую из консеквента его тезиса как стиранием, так и приписыванием слева знака отрицания, то в слабом косвенном доказательстве мы располагаем только первой возможностью (стиранием знака отрицания);

2) если для окончания косвенного доказательства требуется получение последовательности формул, содержащей пару противоречащих формул, и не требуется, чтобы в эту последовательность входило специальное допущение косвенного доказательства, то одним из непременных условий окончания слабого

[15] Формулы $\mathbf{C}'$ не существует, если $\mathbf{C}$ не начинается знаком отрицания, т. е. если $\mathbf{C}$ нельзя представить в виде $\sim \mathbf{B}$.

косвенного доказательства является наличие допущения слабого косвенного доказательства.

Так, в примере на с. 281 лишь (III) является слабым косвенным доказательством.

Таким образом, введенная нами логическая система имеет следующие правила: правила [I] логического следования, правило [II. 1] построения прямого доказательства, правило $[II.2]^{min}$ построения слабого косвенного доказательства, и представляет собой [16] одно из логических исчислений так называемой минимальной логики.

Если в полной системе N, вообще говоря, можно было бы обойтись без правила [II. 1] построения прямого доказательства, то в описанной логической системе минимальной логики правило [II. 2] не делает избыточным применение [II. 1] потому, что ни одна кратная импликация, консеквент которой не начинается со знака отрицания, не может быть доказана с помощью правила $[II.2]^{min}$.

Рассмотрим некоторые теоремы и производные правила, которые можно установить в минимальной логике.

T13. $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to \sim \mathbf{B}) \to \sim \mathbf{A})$.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \mathbf{A} \to \mathbf{B} \\ 2.\ \mathbf{A} \to \sim \mathbf{B} \end{array}\right\} \text{допущ.,}$$

3. $\mathbf{A}$ допущ. слаб. косв. док.,
4. $\mathbf{B}$ МП (3, 1),
5. $\sim \mathbf{B}$ МП (3, 2),

Пртврч.: 4,5.

Относительно T13 производно правило введения отрицания

$$\text{ВО} \quad \frac{\mathbf{A} \to \mathbf{B} \quad \mathbf{A} \to \sim \mathbf{B}}{\mathbf{A}}.$$

T14. $\mathbf{A} \to \sim \sim \mathbf{A}$ — обратный закон двойного отрицания.

Заметим, что (прямой) закон двойного отрицания — $\sim \sim \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ нельзя доказать ни в минимальной, ни в конструктивной логике (система конструктивной логики рассматривается в § 20).

T15. $\sim \sim \sim \mathbf{A} \to \sim \mathbf{A}$.

T16. $\sim (\mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{A})$ — закон противоречия.

[16] Исчисление минимальной логики было впервые построено и исследовано советским ученым акад. А. Н. Колмогоровым (См.: Колмогоров А. Н. О принципе tertium non datur. — Матем. сборник, т. 32, вып. 4. М., 1925).

Доказательство.

1. $A \wedge \sim A$ допущ. слаб. косв. док.,

2. A
3. $\sim A$ } УК (1),

Пртврч.: 2,3

Обращаем внимание на то, что это — косвенное доказательство нулькратной импликации и поэтому в него не вводится других допущений, кроме специального допущения косвенного доказательства.

T17. $(A \to B) \to (\sim B \to \sim A)$.

T18. $(A \to \sim B) \to (B \to \sim A)$.

Относительно T17, T18 производно правило модус толленс, имеющее две схемы:

$$\text{МТ} \quad \frac{A \to B \quad \sim B}{\sim A}; \qquad \frac{A \to \sim B \quad B}{\sim A}.$$

Согласно правилу МТ из импликации и формулы, противоречащей ее консеквенту, следует отрицание ее антецедента.

T19. $\sim(A \wedge B) \to (A \to \sim B)$.

T20. $\sim(A \wedge B) \to (B \to \sim A)$.

Относительно T19, T20 производно правило, имеющее две схемы. Его мы будем называть удалением отрицания конъюнкции:

$$\text{УОК} \quad \frac{\sim(A \wedge B)\ A}{\sim B}; \qquad \frac{\sim(A \wedge B)\ B}{\sim A}.$$

T21. $\sim A \to \sim(A \wedge B)$.

T22. $\sim B \to \sim(A \wedge B)$.

Относительно T21, T22 производно правило, которое можно назвать введением отрицания конъюнкции:

$$\text{ВОК} \quad \frac{\sim A}{\sim(A \wedge B)}; \qquad \frac{\sim B}{\sim(A \wedge B)}.$$

T23. $(\sim A \vee \sim B) \to \sim(A \wedge B)$.

T24. $(A \to B) \to ((A \to C) \to ((\sim B \vee \sim C) \to \sim A))$.

Относительно T24 производно правило простой деструктивной дилеммы

$$\text{Дил}_3. \quad \frac{A \to B \quad A \to C \quad \sim B \vee \sim C}{\sim A}.$$

Данное правило позволяет из двух амликаций с одинаковым антецедентом и из дизъюнкции их консеквентов вывести отрицание консеквента этих импликаций.

T25. $(A \to C) \to ((B \to D) \to ((\sim C \vee \sim D) \to (\sim A \vee \sim B)))$.

Относительно T25 производно правило сложной деструктивной дилеммы

$$\text{Дил}_4. \quad \frac{A \to C \quad B \to D \quad \sim C \vee \sim D}{\sim A \vee \sim B},$$

которое означает, что из двух импликаций и дизъюнкции отрицаний их консеквентов следует дизъюнкция отрицаний их антецедентов.

T26. $\sim A \to (A \to \sim B)$.

T27. $\sim A \to (\sim B \to \sim (A \vee B))$.

Относительно T27 производно правило введения отрицания дизъюнкции

$$\text{ВОД} \quad \frac{\sim A \quad \sim B}{\sim (A \vee B)}.$$

T28. $\sim (A \vee B) \to \sim A$.

T29. $\sim (A \vee B) \to \sim B$.

T30. $\sim (A \vee B) \to (\sim A \wedge \sim B)$.

Относительно T28, T29 производно правило, которое можно назвать правилом удаления отрицания дизъюнкции:

$$\text{УОД} \quad \frac{\sim (A \vee B)}{\sim A}; \qquad \frac{\sim (A \vee B)}{\sim B}.$$

T31. $\sim \sim (A \vee \approx A)$ — двойное отрицание закона исключенного третьего. Сам же закон исключенного третьего недоказуем в минимальной логике.

T32. $\sim (A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \wedge \sim B)$.

Доказательство.

Часть 1. $\sim (A \vee B) \to (\sim A \wedge \sim B)$ р. д. ф., T30.

Часть 2. $(\sim A \wedge \sim B) \to \sim (A \vee B)$

1. $\sim A \wedge \sim B$ допущ.
2. $\sim A$ УК (1)
3. $\sim B$

$\sim (A \vee B)$ ВОД (2, 3)

T33. $(A \wedge \sim B) \to \sim (A \to B)$.

На этом мы заканчиваем обзор теорем и производных правил минимальной логики.

§ 20. Квазисильное косвенное доказательство

Теперь мы несколько уменьшим ограничения, которые были наложены на косвенное доказательство в правиле $[II.2]^{min}$, а именно не будем требовать, чтобы специальное допущение слабого косвенного доказательства непременно входило в доказательство. Иными словами, формулировка нового правила $[II.2]^{cn}$, которым мы будем пользоваться в этом параграфе и которое мы назовем, за неимением более удачного выражения, правилом построения квазисильного доказательства, получается из формулировки правила $[II.2]^{min}$ заменой всюду прилагательного «слабый» прилагательным «квазисильный» и вычеркиванием из второй части правила $[II.2]^{min}$ слов, выделенных там курсивом, т. е. «*формулу* $\mathbf{C}'$».

В примере на с. 281—282 (III), (IV) являются квазисильными доказательствами, причем (III) есть в то же время и слабое косвенное доказательство.

Легко понять, что любое слабое косвенное доказательство является одновременно и квазисильным, но обратное, вообще говоря, неверно. Заметим также, что квазисильное косвенное доказательство есть частный случай косвенного доказательства, полученного в результате ограничения п. 1а) правила [II. 2]. Это ограничение состоит в том, что при построении квазисильного косвенного доказательства, запрещается вводить отрицание консеквента доказываемой кратной импликации.

Логическая система, имеющая в качестве основных правил: правила [I] логического следования, правило [II. 1] построения прямого доказательства и правило $[II.2]^{cn}$ построения квазисильного косвенного доказательства, представляет собой одно из исчислений конструктивной логики.

Рассмотрим некоторые ее специфические теоремы и производные правила.

Т34. $\mathbf{A} \to (\sim \mathbf{A} \to \mathbf{B})$.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \mathbf{A} \\ 2.\ \sim\mathbf{A} \end{array}\right\} \text{допущ.}$$

Пртврч: 1, 2.

Относительно Т34 производно правило, называемое правилом удаления отрицания:

$$\text{УО}\ \ \frac{\mathbf{A}\ \ \sim\mathbf{A}}{\mathbf{B}}.$$

На первый взгляд данное правило кажется «парадоксальным». Это объясняется тем, что в обычных рассуждениях оно применяется или неявно (например, в составе более сложных правил), или на промежуточных стадиях рассуждения, в частности, при отбрасывании некоторых случаев, как невозможных, в тех доказательствах, которые строятся по схеме правила РС.

В конструктивной логике имеют место следующие теоремы, с помощью которых обосновываются правила, применяемые в так называемых разделительных доказательствах, т. е. доказательствах, строящихся путем опровержения, или исключения (как невозможных) некоторых из рассматриваемых случаев.

Т35. $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow (\sim \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$.

Доказательство.

Случай 1. $\mathbf{A} \rightarrow (\sim \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ р. д. ф., Т34.

Случай 2. $\mathbf{B} \rightarrow (\sim \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ р. д. ф., Т35.

Т36. $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow (\sim \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$.

Т37. $(\sim \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$.

Т38. $(\mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$.

Относительно Т35, Т36, Т37 и Т38 производно правило, которое можно назвать удалением дизъюнкции посредством отрицания. Оно имеет следующие четыре схемы:

$$\text{УД/О}\quad \frac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \quad \sim \mathbf{A}}{\mathbf{B}};\quad \frac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \quad \sim \mathbf{B}}{\mathbf{A}};$$

$$\frac{\sim \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \quad \mathbf{A}}{\mathbf{B}};\quad \frac{\mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B} \quad \mathbf{B}}{\mathbf{A}}.$$

Это правило позволяет из дизъюнкции и формулы, противоречащей одному из ее членов, получить другой ее член. Правило УД/О известно в традиционной логике под названием «модус толлендо поненс» [17].

Часто логику высказываний, которая в нашем изложении представлена полной системой N, называют классической логикой высказываний. Несмотря на то, что существуют теоремы классической логики, не доказуемые в конструктивной, в частности, закон исключенного третьего $\mathbf{A} \vee \sim \mathbf{A}$, закон двойного отрицания $\sim \sim \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, конструктивная логика связана с классической рядом интересных соотношений, свидетельствующих в пользу того, что в известном смысле конструктивная логика не беднее логическими средствами, чем классическая. Так, согласно результату В. И. Гливенко (1929), в конструктивной логике высказываний для любой теоремы классической логики высказываний, можно доказать ее двойное отрицание; при этом все теоремы классической логики высказываний, начинающиеся знаком отрицания, доказуемы и в конструктивной логике высказываний. Известно также, что любая теорема классического

[17] Modus tollendo ponens (лат.) — способ утверждения посредством отрицания.

исчисления высказываний, содержащая из пропозициональных связок лишь $\wedge$, $\sim$, доказуема в конструктивном исчислении высказываний. Этот результат был получен К. Геделем (1933). Существуют и другие интересные взаимоотношения между классической и конструктивной логикой, они детально исследованы Н. А. Шаниным [18].

Конструктивная логика, как самостоятельная логическая система, имеет свою семантику. Ее возникновение связано с особым, конструктивным пониманием математических объектов, согласно которому математические объекты являются результатами процессов построения, и принятием такого способа мышления, который позволяет выявить специфические черты этих конструктивных объектов. Указанному требованию, в частности, не удовлетворяют классические (сильные) косвенные доказательства [19], так как с их помощью в математике доказываются так называемые чистые теоремы существования. В то же время, согласно конструктивному пониманию, существование объекта с данными свойствами считается доказанным, когда указывается способ потенциально осуществимого построения объекта с данными свойствами [20].

Конструктивная логика своим развитием во многом обязана трудам таких советских ученых, как А. Н. Колмогоров, В. Г. Гливенко, А. А. Марков, Н. А. Шанин и др.

§ 21. Сильное (классическое) косвенное доказательство

Сначала мы рассмотрим ситуацию, которая возникает, когда к описанной в предыдущем параграфе логической системе конструктивной логики добавляется еще одно правило следования, называемое *правилом двойного отрицания*. Оно представлено фигурой

$$\text{ДО} \quad \frac{\sim\sim A}{A}.$$

Новую логическую систему, полученную добавлением ДО к списку [I] правил следования конструктивного исчисления высказываний из § 20 обозначим посредством N^{cs}. Мы говорили, что в системе N правило [II. 1] построения прямого доказательства избыточно [21]. Но в системе N^{cs} аналогичное положение не имеет места, чем она выгодно отличается от равнообъемной, как увидим ниже, системы N.

---

[18] Шанин Н. А. Логические проблемы арифметики — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XLII, 1954.

[19] Они рассматриваются ниже в § 21.

[20] Обстоятельное рассмотрение затронутого вопроса читатель найдет в статьях Маркова А. А. «Конструктивное направление (в математике и логике)» и «Математическая логика». — См.: Философская энциклопедия, т. 3. М., 1964.

[21] См. с. 285.

Прежде чем приступить к установлению равнообъемности систем N^{cs} и N, покажем, что в системе N имеет место следующая теорема — закон двойного отрицания.

Т39. $\sim\sim\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{A}$.

Доказательство.

1. $\sim\sim\mathbf{A}$ допущ.
2. $\sim\mathbf{A}$ допущ. косв. док.

Пртврч: 2, 1.

Поэтому в системе N производно правило ДО системы N^{cs}.

Установление равнообъемности указанных систем N и N^{cs} сводится, очевидно, к доказательству следующих предложений.

Лемма 1. *Любое доказательство в системе* $\mathbf{N}^{cs}$ *можно преобразовать в одноименное доказательство*[22] *в системе* $\mathbf{N}$.

Лемма 2. *Любое доказательство в системе* $\mathbf{N}$ *можно преобразовать в одноименное доказательство в системе* $\mathbf{N}^{cs}$.

Покажем сначала, что имеет место лемма 1. Рассмотрим произвольное доказательство $\mathbf{D}$ в системе N^{cs}. Предположим, что доказательства, непосредственно предшествующие $\mathbf{D}$, уже преобразованы в одноименные доказательства в системе N.

Для D возможны два случая.

Случай 1. $\mathbf{D}$ не содержит применения правила ДО. В этом случае $\mathbf{D}$ и есть требуемое доказательство в системе N.

Случай 2. $\mathbf{D}$ содержит применение правила ДО. Так как ДО производно в N, то устраняя его применения из $\mathbf{D}$ уже известным нам способом[23], мы получим требуемое доказательство в системе N.

Прежде чем приступить к установлению леммы 2, введем понятие сильного (классического) косвенного доказательства. Косвенное доказательство называется сильным, если при его построении непременно вписывается отрицание консеквента доказываемой кратной импликации.

Так, в примере на с. 281—282 (V) является единственным сильным косвенным доказательством.

Для большей ясности мы приводим

[II.2]° Правило построения сильного косвенного доказательства.

Сильное косвенное доказательство формулы

$$\mathbf{A}_1\rightarrow(\mathbf{A}_2\rightarrow\ \dots\ (\mathbf{A}_n\rightarrow\mathbf{C})\ \dots), \qquad (*)$$

строится согласно следующему предписанию.

На любом шаге построения можно написать:

1) одну из формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ в качестве допущения;

---

[22] Напоминаем, что отношение одноименности доказательств было определено на с. 283.

[23] См. выше, с. 285.

1а) формулу $\sim \mathbf{C}$ в качестве допущения сильного косвенного доказательства;

2) формулу, следующую из ранее написанных формул, по одному из правил логического следования;

3) ранее доказанную формулу.

Сильное косвенное доказательство формулы (*) считается построенным, если в соответствии с пп. 1)—3), включая и п. 1а), получена последовательность формул, содержащая формулу $\sim \mathbf{C}$, пару противоречащих формул и оканчивающаяся одной из формул данной пары.

Таким образом, выявляется следующая классификация доказательств в системе N. Доказательства подразделяются на прямые и косвенные, а последние в свою очередь делятся на квазисильные и сильные.

Покажем теперь, что имеет место лемма 2. Пусть $\mathbf{D}$ — произвольное доказательство в системе N. В предположении что все доказательства, непосредственно предшествующие $\mathbf{D}$ уже преобразованы в одноименные доказательства в системе N^{cs}, рассмотрим следующие случаи:

Случай 1. $\mathbf{D}$ есть прямое доказательство. Данный случай тривиален, так как $\mathbf{D}$ совпадает с требуемым доказательством в системе N^{cs}.

Случай 2. $\mathbf{D}$ есть квазисильное косвенное доказательство. И этот случай тривиален по той же причине.

Случай 3. $\mathbf{D}$ есть сильное косвенное доказательство. В этом случае мы поступаем так. Очевидно, что ничто не препятствует считать доказательство $\mathbf{D}$ формулы (*) квазисильным доказательством формулы

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ \dots (\mathbf{A}_n \to \sim\sim \mathbf{C}) \dots) \qquad (**)$$

в системе N^{cs}.

Беря (**) в качестве ранее доказанной формулы, мы строим требуемое доказательство $\mathbf{D}'$ в системе N^{cs} формулы (*), как показано ниже:

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ \dots (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}) \dots).$$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \mathbf{A}_1 \\ 2.\ \mathbf{A}_2 \\ \cdot\quad \cdot \\ \cdot\quad \cdot \\ \cdot\quad \cdot \\ n.\ \mathbf{A}_n \end{array}\right\} \text{допущ.}$$

$n+1.$ $\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \dots (\mathbf{A}_n \to \sim\sim \mathbf{C}) \dots)$ р. д. ф.,

$n+2.$ $\sim\sim \mathbf{C}$ МП$'$ $(1,\ 2, \dots\ n;\ n+1)$,

$\mathbf{C}$ ДО $(n+2)$.

Таким образом, на основании лемм 1 и 2 можно считать установленным следующее предложение.

Теорема 1. *Системы* N *и* N^{cs} *равнообъемны (эквивалентны).*

Из этой теоремы непосредственно следует, что правило [II. 2]^{p} построения сильного косвенного доказательства производно в системе N^{cs}.

Пример. Пользуясь методом, содержащимся в доказательстве леммы 2, перестроим доказательство (V) в системе N, приведенное в примере на с. 282 в одноименное доказательство в N^{cs}. Сначала надо преобразовать все предшествующие ему доказательства. Но (V) предшествует элементарное квазисильное доказательство (III), которое согласно случаю 2 совпадает с требуемым. Далее мы рассматриваем (V) как квазисильное доказательство в системе N^{cs} формулы

$$((p \to q) \to p) \to \sim\sim p.$$

Требуемое окончательное доказательство в системе N^{cs} приводится ниже:

$$((p \to q) \to p) \to p.$$

Доказательство.

1. $(p \to q) \to p$	допущ.
2. $((p \to q) \to p) \to \sim\sim p$	р. д. ф.
3. $\sim\sim p$	МП (1, 2)
p	ДО (3)

В качестве дальнейших логических теорем системы N (или, что то же, системы N^{cs}) мы предлагаем читателю в порядке упражнения установить следующие:

T40. $\mathbf{A} \vee \sim \mathbf{A}$ закон исключенного третьего.

T41. $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\sim \mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{B})$.

T42. $(\sim \mathbf{B} \to \sim \mathbf{A}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B})$.

T43. $\sim (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \to ((\sim \mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to ((\sim \mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to \mathbf{C}))$.

T44. $\sim (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow (\sim \mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B})$.

T45. $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \sim (\mathbf{A} \to \sim \mathbf{B})$.

T46. $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{B})$.

T47. $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow (\sim \mathbf{A} \to \mathbf{B})$.

T48. $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \leftrightarrow \sim (\mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B})$.

T49. $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow \sim (\sim \mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B})$.

T50. $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \leftrightarrow (\sim \mathbf{A} \vee \mathbf{B})$.

T51. $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \sim (\sim \mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B})$.

Рассмотрев систему N, мы раскрыли ее иерархическую структуру, т. е. выявили в составе этой системы ряд подсистем, находящихся в отношении последовательного подчинения, или субординации.

Начав рассмотрение с системы положительной (позитивной) логики — будем обозначать ее посредством N^{pos} — мы перешли, добавив к N^{pos} правило $[II.2]^{min}$ построения слабого косвенного доказательства, к системе минимальной логики — обозначив ее через N^{min}. Далее, заменив в N^{min} правило $[II.2]^{min}$ более общим правилом $[II.2]^{cn}$ построения квазисильного косвенного доказательства, мы получили систему конструктивной логики — обозначив ее N^{cn}. Система N^{cn} в нашем рассмотрении уже непосредственно подчинена полной системе N.

Субординация рассмотренных систем представляет собой естествениую логическую иерархию, которую можно рассматривать в качестве абстрактной модели развития форм логических умозаключений (рассуждений). Так, переход от N^{pos} к N^{min} является переходом от форм умозаключений, лежащих в основе прямых доказательств, к формам умозаключений, в которых, кроме прямых, осуществляются и так называемые слабые косвенные доказательства.

Дальнейшие переходы представляют нарастание «степеней косвенности» форм умозаключений.

В данной иерархии можно было бы выделить еще одну, в известном смысле, предельную логическую систему, именно ту подсистему системы N^{pos}, которая из правил [I] следования имеет лишь МП, а в качестве правила построения доказательства — правило [II.1] построения прямого доказательства. Системы, равнообъемные указанному фрагменту системы N^{pos}, называются *исчислениями положительной (позитивной) импликации*.

В системе положительной импликации формализуется минимум фундаментальных логических принципов в том смысле, что логические средства этой системы явно или неявно используются в построении всех логических доказательств.

Упражнения:

I. Систему Слупецкого — Борковского для логики высказываний можно получить, заменив в системе N правило УД следующим:

$$\frac{A \vee B \sim A}{B},$$

а правило [II.2] — его частным случаем — правилом $[II.2]^p$. Требуется доказать, что система N равиообъемиа системе Слупецкого — Борковского.

II. Показать, что:

1) система, получаемая добавлением к N^{min} правила УО, равиообъемиа системе N^{cn};

2) система, получаемая добавлением к N^{min} правила ДО, равиообъемиа системе N.

III. Показать, что:

1) система, получаемая добавлением к N^{pos} правил ВО, УО, равиообъемна системе N^{cn};

2) система, получаемая добавлением к N^{pos} правил ВО, ДО равнообъемна системе N.

IV. Показать, что система, имеющая правила [I] логического следования и правило [II. 2]^0 построения сильного косвенного доказательства, равнообъемна системе N.

§ 22. Полнота классического исчисления высказываний

До сих пор у нас еще не может быть полной уверенности в корректности рассмотренных в предшествующих параграфах логических правил. Иначе говоря, не совсем ясно, не получим ли мы, пользуясь этими правилами, ложных следствий из истинных посылок. Но если мы покажем, что все доказуемые формулы (теоремы) системы N тождественно-истинны, то у нас не будет оснований сомневаться в корректности как основных, так и производных логических правил этой системы. Свойство логической системы, состоящее в том, что доказуемые в ней формулы тождественно-истинны, называется корректностью данной системы относительно класса логических тождеств, или семантической корректностью.

Но естественно поставить и еще один вопрос: достаточно ли логических средств системы N для обоснования всех допустимых в логике высказываний способов рассуждения? На этот вопрос мы, очевидно, получим утвердительный ответ, если покажем, что любая теорема системы N является логическим тождеством.

Свойство логической системы, состоящее в том, что любая тождественно-истинная формула доказуема в ней, называется полнотой данной системы относительно класса логических тождеств, или семантической полнотой. Руководствуясь требованиями корректности и полноты, можно судить об адекватности формального аппарата логического исчисления содержательно охарактеризованным принципам логики.

Покажем сначала, что система N естественного вывода семантически полна, отложив установление ее семантической корректности до следующего параграфа.

Будем говорить, что формула $\mathbf{F}$ составлена из пропозициональных букв $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$ (эти буквы выписаны без повторений), если в перечне $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$ имеются все пропорциональные буквы, входящие в $\mathbf{F}$ (но могут содержаться и другие, не входящие в $\mathbf{F}$ буквы).

Очевидно, что для любой формулы можно указать (неограниченно) много перечней пропозициональных букв, из которых она составлена, но только один из этих перечней будет минимальным, а именно тот, в котором нет пропозициональных букв, не входящих в данную формулу.

Пример. Ниже приводится несколько перечней пропозициональных букв, из которых составлена формула

$$\sim p \vee q,$$

первый из них является минимальным:

1) p, q; 2) p, q, r; 3) p, q, r, p_1, q_2 и т. д.

Напоминаем, что обобщенная таблица может быть поставлена в соответствие формуле $\mathbf{F}$ при заданном перечне $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$ пропозициональных букв, из которых составлена $\mathbf{F}$ следующим образом.

В n начальных (входных) столбцов таблицы вписываются пропозициональные буквы $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$ (по одной в каждый столбец); в заключительный столбец выписывается формула $\mathbf{F}$. Промежуточные столбцы заполняются остальными подформулами формулы $\mathbf{F}$ (также по одной в каждом столбце). Начальные столбцы заполняются всеми различными наборами, образованными из символов логических значений (по одному символу в каждом столбце и по одному набору в каждой строке). Очевидно, что число таких n-членных наборов будет равно 2^n. Остальные столбцы заполняются символами логических значений в соответствии с истинностными таблицами для логических знаков: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ до тех пор, пока полностью не будет заполнен заключительный столбец.

В дальнейшем под таблицей формулы всюду понимается обобщенная таблица. Кроме того, схему кратной импликации

$$\mathbf{A}_1 \rightarrow (\mathbf{A}_2 \rightarrow \ \ldots \ (\mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{C}) \ \ldots)$$

мы будем иногда сокращённо записывать так:

$$\mathbf{A}_1, \ \mathbf{A}_2, \ \ldots, \ \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{C}.$$

Введем одно вспомогательное понятие. Будем говорить, что

$$\mathbf{G}_1^i, \ \mathbf{G}_2^i, \ \ldots, \ \mathbf{G}_k^i$$

является n-кой, отвечающей i-й $(i = 1, 2, \ldots, 2^n)$ строке в таблице формулы при перечне $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$ пропозициональных букв, из которых составлена $\mathbf{F}$ [в дальнейшем сокращенно: (i-й) соответственной n-кой формулы $\mathbf{F}$], если выполняются условия:

1) $\mathbf{G}_k^i$ есть $\mathbf{E}_k$ для любого $\kappa (\kappa = 1, 2, \ldots, n)$, когда в i-той строке под $\mathbf{E}_k$ стоит символ логического значения «истинно»;

2) $\mathbf{G}_k^i$ есть $\sim \mathbf{E}_k$ для любого $\kappa (\kappa = 1, 2, \ldots, n)$, когда в i-й строке под $\mathbf{E}_k$ стоит символ логического значения «ложно».

Имеют место следующие леммы:

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{G}_1^i, \mathbf{G}_2^i, \ldots, \mathbf{G}_n^i$ *есть (i-я) соответственная n-ка формулы* $\mathbf{F}$. *Тогда, если в i-й строке (данной* *таблицы формулы* F) *под* F *написан символ логического значения «истинно», то формула*

$$\mathrm{G}_1^i,\ \mathrm{G}_2^i,\ \ldots,\ \mathrm{G}_n^i \rightarrow \mathrm{F} \qquad \text{(I)}$$

доказуема в системе N, и если в i-й строке (данной таблицы формулы F) *под* F *написан символ логического значения «ложно», то формула*

$$\mathrm{G}_1^i,\ \mathrm{G}_2^i,\ \ldots,\ \mathrm{G}_n^i \rightarrow \sim \mathrm{F} \qquad \text{(II)}$$

доказуема в системе N.

Доказательство леммы можно свести к рассмотрению следующих случаев:

Случай 0. Формула F — пропозициональная буква. Тогда, если (в i-й строке) под F написан символ логического значения «истинно», формула F совпадает с одной из формул G_1^i, G_2^i, ..., G_n^i, а потому формула (I) по Т2[24] доказуема в *N*. Сходным образом, если под F написан символ логического значения «ложно», формула (II) по Т2 также доказуема в *N*.

Теперь в предположении, что лемма верна для собственных подформул[25] формулы F, рассмотрим дальнейшие случаи.

Случай I. Формула F представима в виде $\sim$A.

Случай I.1. Под F написан в i-й строке символ логического значения «истинно». Тогда (в этой же строке) под A написан символ логического значения «ложно», а потому (согласно предположению) в *N* доказуема формула

$$\mathrm{G}_1^i,\ \mathrm{G}_2^i,\ \ldots,\ \mathrm{G}_n^i \rightarrow \sim \mathrm{A},$$

которая совпадает с требуемой формулой (I).

Случай I.2. Под F написан символ логического значения «ложно». Тогда под A написан символ логического значения «истинно» и (по предположению) формула

$$(1)\quad \mathrm{G}_1^i,\ \mathrm{G}_2^i,\ \ldots,\ \mathrm{G}_n^i \rightarrow \mathrm{A}$$

доказуема в *N*. Кроме того, в *N* доказуема формула

$$(2)\quad \mathrm{A} \rightarrow \sim\sim \mathrm{A} \text{ по Т14[26]}.$$

Применяя к формулам (1) и (2) обобщенное правило силлогизма,[27] устанавливаем, что требуемая формула (II) также доказуема в *N*.

Случай II. Формула F представима в виде A $\wedge$ B.

Случай II.1. Под F написан в i-й строке символ логического значения «истинно». Тогда в данной строке этот же сим-

---

[24] См. выше, с. 287.
[25] Т. е. формул, отличных от формулы F.
[26] См. выше, с. 292.
[27] См. выше, с. 287.

вол написан как под **A**, так и под **B**. По предположению, каждая из формул

$$\mathbf{G}_1^i,\ \mathbf{G}_2^i,\ \ldots,\ \mathbf{G}_n^i \to \mathbf{A};$$

$$\mathbf{G}_1^i,\ \mathbf{G}_2^i,\ \ldots,\ \mathbf{G}_n^i \to \mathbf{B}$$

доказуема в N. Следовательно, на основании правила ДЧ (правила доказательства по частям[28]) в N должна быть доказуема и требуемая формула (I).

Случай II.2. Под **F** написан символ логического значения «ложно». Тогда а) под **A** или б) под **B** написан этот же символ.

Мы ограничимся рассмотрением подслучая а), так как подслучай б) рассматривается аналогично.

По предположению формула

$$(1)\quad \mathbf{G}_1^i,\ \mathbf{G}_2^i,\ \ldots\ \mathbf{G}_n^i \to \sim \mathbf{A}$$

доказуема в N. Кроме того, в N доказуема формула

$$(2)\quad \sim \mathbf{A} \to \sim (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \text{ по T21.}$$ [29]

Требуемая формула (II) следует из формул (1) и (2) по обобщенному правилу силлогизма.

Случай III. Формула **F** представима в виде $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$.

Случай III.1. Под **F** написан символ логического значения «истинно». Тогда этот же символ написан а) под **A** или б) под **B**. Здесь мы ограничимся рассмотрением подслучая б).

По предположению формула

$$(1)\quad \mathbf{G}_1^i,\ \mathbf{G}_2^i,\ \ldots\ \mathbf{G}_n^i \to \mathbf{B}$$

доказуема в N. Кроме того, в N доказуема и формула

$$(2)\quad \mathbf{B} \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \text{ по T11.}$$ [30]

Из (1) и (2) по правилу обобщенного силлогизма следует требуемая формула (I).

Случай III.2. Под **F** написан символ логического значения «ложно». Тогда как под **A**, так и под **B** написан этот же символ.

По предположению, каждая из следующих формул:

$$(1)\quad \mathbf{G}_1^i,\ \mathbf{G}_2^i,\ \ldots,\ \mathbf{G}_n^i \to \sim \mathbf{A};$$

$$(2)\quad \mathbf{G}_1^i,\ \mathbf{G}_2^i,\ \ldots,\ \mathbf{G}_n^i \to \sim \mathbf{B}$$

доказуема в N. Кроме того, в N доказуема формула

$$(3)\quad (\sim \mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B}) \to \sim (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \text{ по T32}$$ [31].

---

[28] См. выше, с. 289.
[29] См. выше, с. 293.
[30] См. выше, с. 288.
[31] См. выше, с. 294.

Согласно правилу ДЧ, если (1) и (2) доказуемы в N, то в N доказуема и формула

$$(4)\quad \mathbf{G}_1^i,\ \mathbf{G}_2^i,\ \dots,\ \mathbf{G}_n^i \to (\sim \mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B}).$$

Наконец, из формул (4) и (3) по правилу обобщенного силлогизма следует требуемая формула (II).

Случай IV. Формула $\mathbf{F}$ представима в виде $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Случай IV. 1. Под $\mathbf{F}$ написан символ логического значения «истинно». Тогда а) под $\mathbf{A}$ написан символ логического значения «ложно» или б) под $\mathbf{B}$ написан символ логического значения «истинно».

Если имеет место а), то по предположению в N доказуема формула

$$(1)\quad \mathbf{G}_1^i,\ \mathbf{G}_2^i,\ \dots,\ \mathbf{G}_n^i \to \sim \mathbf{A}.$$

Кроме того, в N доказуема формула

$$(2)\quad \sim \mathbf{A} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B})\ \text{Ср. Т34.}$$ [32]

По правилу обобщенного силлогизма из (1) и (2) следует требуемая формула (I).

Если имеет место б), то в N доказуема формула

$$(1)\quad \mathbf{G}_1^i,\ \mathbf{G}_2^i,\ \dots,\ \mathbf{G}_n^i \to \mathbf{B}.$$

Очевидно также, что в N доказуема формула

$$(2)\quad \mathbf{B} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B})\ \text{по Т3.}$$ [33]

По правилу обобщенного силлогизма из (1) и (2) следует требуемая формула (I).

Случай IV. 2. Под $\mathbf{F}$ написан символ логического значения «ложно». Тогда под $\mathbf{A}$ написан символ логического значения «истинно», а под $\mathbf{B}$ — символ логического значения «ложно».

По предположению, в этом случае в N доказуемы формулы

$$(1)\quad \mathbf{G}_1^i,\ \mathbf{G}_2^i,\ \dots,\ \mathbf{G}_n^i \to \mathbf{A};$$

$$(2)\quad \mathbf{G}_1^i,\ \mathbf{G}_2^i,\ \dots,\ \mathbf{G}_n^i \to \sim \mathbf{B}.$$

Согласно правилу ДЧ если в N доказуемы формулы (1) и (2), то в N доказуема и формула

$$(3)\quad \mathbf{G}_1^i,\ \mathbf{G}_2^i,\ \dots,\ \mathbf{G}_n^i \to (\mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B}).$$

Кроме того, в N доказуема формула

$$(4)\quad (\mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B}) \to \sim (\mathbf{A} \to \mathbf{B})\ \text{по Т33.}$$ [34]

---

[32] См. выше, с. 295.
[33] См. выше, с. 288.
[34] См. выше, с. 294.

По обобщенному правилу силлогизма из (3) и (4) следует требуемая формула (II).

Рассмотрением данного частного случая завершается доказательство леммы 3.

Лемма 4. *Пусть* 1) $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — *перечень пропозициональных букв, из которых составлена формула* F. *Тогда, если* F *есть тождественно-истинная формула, то в системе* **N** *доказуема формула*

$$(E_1 \vee \sim E_1),\ (E_2 \vee \sim E_2),\ \ldots,\ (E_n \vee \sim E_n) \to F. \qquad \text{(III)}$$

Доказательство. Применяя к формуле (III) $2^{(n-1)} + 2^{(n-2)} + \ldots + 1$ раз правило РС (правило доказательства разбором случаев[35]), мы сводим задачу на доказательство формулы (III) к построению доказательств каждой из 2^n кратных импликаций, представимых в виде

$$G_1^i,\ G_2^i,\ \ldots,\ G_n^i \to F, \qquad \text{(IV)}$$

где $G_1^i, G_2, \ldots, G_n^i$ — соответственная n-ка формулы F.

По лемме 3 для любого $i (i = 1, 2, \ldots, 2^n)$ формула (IV) доказуема в **N**.

Теперь уже нетрудно установить, что система **N** естественного вывода семантически полна.

Теорема 2. *Если формула* F *тождественно-истинна, то* F *доказуема в* **N**.

Доказательство. По лемме 4, если $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — перечень пропозициональных букв, из которых составлена формула F, то в **N** доказуема формула (III).

В то же время в системе **N** доказуема любая формула вида

$$E_i \vee \sim E_i.$$ [36]

Отсюда следует, что формула F доказуема в **N**.

Доказательство теоремы 2 дает эффективный общий метод (алгоритм), с помощью которого для любой тождественно-истинной формулы по ее таблице можно построить доказательство данной формулы в системе **N**.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Если формулы* A, B *равносильны, то в системе* **N** *доказуема формула* $A \leftrightarrow B$.

Очевидно, что с помощью логической теоремы вида $A \leftrightarrow B$ мы можем показать, что в системе **N** производны правила следования вида

$$\frac{A}{B};\quad \frac{B}{A},$$

---

[35] См. выше, с. 290.

[36] См. выше, с. 300, Т40.

которые можно записать в виде одной схемы

$$\frac{A}{B}.$$

Двойная черта в этой схеме указывает на то, что данное правило обратимо, т. е. его можно применять как сверху вниз, так и снизу вверх.

Понятно, что согласно следствию из теоремы 2 все применявшиеся до сих пор равносильности можно рассматривать в качестве обратимых производных правил системы *N* естественного вывода.

§ 23. Аксиоматическое представление логики высказываний

В этом параграфе мы познакомимся с новым видом логических исчислений. Логические системы такого вида называются исчислениями гильбертовского типа по имени немецкого ученого Д. Гильберта.

По сравнению с системами естественного вывода в исчислениях гильбертовского типа формальная структура доказательств (построенных без использования производных правил) существенно отличается от логического строения обычных рассуждений.

Здесь не используется метод введения допущений в качестве основного правила, и доказательства теорем строятся как выводы из формул, принимаемых в качестве аксиом, логической системы.

При построении исчисления высказываний гильбертовского типа выбирают конечный запас логических тождеств или конечный запас эффективно определенных (например, с помощью формульных схем) типов логических тождеств в качестве аксиом и указывают правила, применяя которые можно получать из аксиом новые логические тождества в качестве теорем, или доказуемых формул, соответствующей логической системы.

В описываемой ниже системе *H* аксиомами являются формулы следующих видов:

A1. $A \to (B \to A)$.
A2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
A3. $A \to (B \to (A \wedge B))$
A4. $(A \wedge B) \to A$
A5. $(A \wedge B) \to B$
A6. $A \to (A \vee B)$
A7. $B \to (A \vee B)$
A8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
A9. $(A \to B) \to ((A \to \sim B) \to \sim A)$
A10. $A \to (\sim A \to B)$
A10^0. $\sim\sim A \to A$,

а единственным правилом вывода служит

$$\text{МП}\quad \frac{\mathbf{A}\ \ \mathbf{A}\to\mathbf{B}}{\mathbf{B}}.$$

Доказательство в системе **H** формулы **F** строится согласно следующему предписанию.

На любом шаге построения можно написать:

1) одну из аксиом;

2) формулу, следующую из ранее написанных формул по правилу МП.

Доказательство формулы **F** считается построенным, если в соответствии с пп. 1)—2) получена последовательность формул, оканчивающаяся формулой **F**.

В системе **F** формула называется доказуемой формулой, или логической теоремой, если можно построить доказательство данной формулы.

Так же как и в системе *N*, в системе *H* знак $\leftrightarrow$ вводится по определению.

Пример. Ниже приводится доказательство в системе *H* формулы

$$q\to q.$$

Доказательство.

1.	$(q\to((p\to q)\to q))\to((q\to(p\to q))\to(q\to q))$	аксиома A2
2.	$q\to((p\to q)\to q)$	аксиома A1
3.	$(q\to(p\to q))\to(q\to q)$	МП (2, 1)
4.	$q\to(p\to q)$	аксиома A1
	$q\to q$	МП (4, 3)

Сделаем некоторые пояснения. При получении аксиомы в строке 1 по аксиомной схеме A2, последняя применяется следующим образом. В A2 мы заменяем (замещаем) все вхождения **A** вхождениями q; далее все вхождения **C** замещаются вхождениями q; наконец, на места вхождений **B** вставляется формула $p\to q$. Аксиома в строке 2 получается из аксиомной схемы A1 заменой буквы **A** на q и буквы **B** на $p\to q$. В строку 3 формула вписывается по правилу МП на основании формул, написанных в строках 1, 2.

Предлагаем читателю самому шаг за шагом убедиться, что схема правила МП здесь применена корректно. Последняя строка приведенного доказательства, по-видимому, не нуждается больше в дополнительных пояснениях. Заметим также, что доказательство той же формулы в системе *N* тривиально и состоит всего из одной строки (см. с. 280).

Существует простая связь между доказательствами конкретных формул (логики высказываний) и схемами доказательств. Так, выше была доказана формула $q\to q$. Ее доказательство легко превратить в схему доказательства формулы вида

$\mathbf{A} \to \mathbf{A}$. Для этого в доказательстве формулы $q \to q$ надо всюду q заменить на $\mathbf{A}$, и p на $\mathbf{B}$. В результате описанной процедуры мы получаем следующую схему, по которой можно построить доказательство любой формулы вида

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}.$$

Доказательство.

1. $(\mathbf{A} \to ((\mathbf{B} \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A})) \to ((\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})) \to$
$\to (\mathbf{A} \to \mathbf{A}))$ аксиома A2
2. $\mathbf{A} \to ((\mathbf{B} \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A})$ аксиома A1
3. $(\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{A})$ МП (2, 1)
4. $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$ аксиома A1

$\mathbf{A} \to \mathbf{A}$ МП (4, 3)

Вообще, для получения из доказательства какой-либо конкретной формулы схемы доказательства произвольной формулы соответствующего вида надо всюду в формуле и в ее доказательстве заменить пропозициональные буквы метапеременными, следя за тем, чтобы различные пропозициональные буквы заменялись различными метапеременными.

В системе $\boldsymbol{H}$ аксиомы задаются с помощью аксиомных схем, т. е. особых выражений метаязыка этой системы. Как мы знаем, конкретная аксиома может быть получена надлежащим замещением метапеременных в соответствующей аксиомной схеме произвольными формулами. Но можно поступить иначе, задав аксиомы в самом языке системы в виде списка из следующих 11 формул:

1. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
2. $p \to (q \to p)$
3. $p \to (q \to (p \land q))$
4. $(p \land q) \to p$
5. $(p \land q) \to q$
6. $p \to (p \lor q)$
7. $q \to (p \lor q)$
8. $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \lor q) \to r)$
9. $(p \to q) \to ((p \to \sim q) \to \sim p)$
10. $p \to (\sim p \to q)$
11. $\sim \sim p \to p$.

В этом случае, кроме правила МП, потребуется еще одно правило — правило подстановки. Операция подстановки определяется следующим образом. Подстановкой в формулу $\mathbf{A}$ формулы $\mathbf{F}$ вместо некоторой пропозициональной буквы $\mathbf{E}$ называется замещение всех вхождений $\mathbf{E}$ вхождениями $\mathbf{F}$. Эту операцию можно производить и одновременно вместо нескольких различных пропозициональных букв, следя за тем, чтобы одинаковые пропозициональные буквы замещались всюду одинаковыми формулами[37]. Описанная система — назовем ее H' — очевидно, равнообъемна системе H. Действительно, легко видеть, что любая аксиома в H является результатом подстановки в соответствующую аксиому системы H'. Например, аксиома системы H, построенная по схеме А1, является результатом подстановки в аксиому 1 системы H'. Аксиома системы H, построенная по А2, является результатом подстановки в аксиому 2 системы H' и т. д. Поэтому любое доказательство $\mathbf{D}$ в системе H перейдет в одноименное доказательство $\mathbf{D}'$ в системе H' вставкой в $\mathbf{D}$ перед каждым вхождением аксиомы системы H соответствующей аксиомы системы H'.

Предоставляем читателю самостоятельно убедиться, что любое доказательство в системе H' можно преобразовать в одноименное доказательство в системе H, после чего можно будет считать установленной равнообъемность системы H ее варианту H'.

Наша ближайшая цель состоит в доказательстве равнообъемности системы H и системы N естественного вывода рассмотренной ранее. Как мы уже знаем, для установления равнообъемности логических систем достаточно указать метод, с помощью которого любое доказательство в одной системе можно эффективно преобразовать в одноименное доказательство в другой системе, и обратно.

Замечание. Нетрудно видеть, что любое доказательство в системе H можно рассматривать в качестве одноименного доказательства в системе N, так как каждая из аксиом системы H доказуема в N (см. выше Т3, Т5—Т11, Т13, Т34, Т39, с 288, 292, 295, 298) и, кроме того, в системе N имеется правило МП. Таким образом, первая часть доказательства равнообъемности H и N тривиальна.

Для доказательства второй части равнообъемности — нахождения метода обратного преобразования доказательств в системе N в одноименнные доказательства в системе H, введем понятие вывода из исходных формул, называемых также посылками, или допущениями.

Вывод (в системе H) формулы $\mathbf{C}$ из исходных формул (допущений) $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ (в дальнейшем, сокращенно: вывод $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n/\mathbf{C}$) есть последовательность формул, строящаяся так, что на любом шаге построения можно написать:

1) одну из формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$;

2) формулу, следующую из ранее написанных формул по правилу МП;

3) аксиому или ранее доказанную формулу.

Построение вывода $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}/\mathbf{C}$ считается законченным, если в соответствии с пп. 1)—3) получена последовательность формул, конечная формула которой совпадает с $\mathbf{C}$.

---

[37] В то же время различные пропозициональные буквы можно замещать как различными, так и одинаковыми формулами.

Очевидно, что доказательство формулы **C** в системе ***H*** есть частный случай вывода в этой же системе из допущений, а именно тот частный случай, когда число допущений $n = 0$; иначе говоря, когда вывод строится при пустом списке допущений.

Нетрудно видеть, что для установления производности в системе ***H*** правила следования, представленного фигурой вида

$$\frac{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n}{\mathbf{C}},$$

достаточно построить в этой системе вывод

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n/\mathbf{C},$$

так как любое применение в доказательствах производного правила можно устранить надлежащей вставкой соответствующего ему вывода.

Лемма 5. *В системе **H** производны следующие правила (системы **N**)* МП, ВК, УК, ВД, УД.

Доказательство леммы легко получается построением соответствующих выводов. Так приводимый ниже вывод показывает, что правило ВК производно в системе ***H***.

Вывод; **A, B/A ∧ B**

1.	$\mathbf{A}$	допущ.
2.	$\mathbf{B}$	допущ.
3.	$\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$	аксиома, А3
4.	$\mathbf{B} \to (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$	МП (1, 3)
	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$	МП (2, 4)

Предлагаем читателю в качестве несложного упражнения довести до конца доказательство данной леммы.

Основную роль в преобразовании доказательств в системе ***H*** в одноименные доказательства в системе ***N*** играет следующее важное утверждение, носящее название дедукционной теоремы. Применительно к нашему изложению оно может быть сформулировано в следующей форме.

Теорема 3. *Если предъявлен вывод* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n/\mathbf{C}$ *в системе **H**, то в системе **H** можно построить вывод*

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}/\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}.$$

Доказательство этой теоремы будет состоять в обосновании метода перестройки вывода

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n/\mathbf{C},$$

называемого в дальнейшем вспомогательным, в вывод

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}/\mathbf{A}_n \to \mathbf{C},$$

который называется в дальнейшем результирующим.

Пусть последовательность формул

$$\mathbf{B}_1;$$
$$\mathbf{B}_2;$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{B}_k;$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{B}_l$$

есть вспомогательный вывод.

Очевидно, что $\mathbf{B}_l$, как конечная формула данного вывода, совпадает с $\mathbf{C}$.

Согласно определению вывода из исходных формул (допущений) для любой формулы $\mathbf{B}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) данной последовательности имеет место хотя бы один из следующих случаев:

Случай 1. $\mathbf{B}_k$ является аксиомой.

Случай 2. $\mathbf{B}_k$ является ранее доказанной формулой.

Случай 3. $\mathbf{B}_k$ является одной из формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$.

Случай 4. $\mathbf{B}_k$ является формулой $\mathbf{A}_n$.

Случай 5. $\mathbf{B}_k$ следует из ранее написанных формул $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{B}_j$ по правилу МП. Мы можем считать, что $\mathbf{B}_j$ представима в виде $\mathbf{B}_i \to \mathbf{B}_k$.

Приписав слева к каждой формуле вспомогательного вывода выражение $A_n \to$, мы получим последовательность формул:

$$\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_1;$$
$$\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_2;$$
$$\text{(I)} \qquad \vdots$$
$$\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_k;$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_l,$$

которая, вообще говоря, не является требуемым результирующим выводом. Но мы покажем, что путем надлежащих вставок данная последовательность может быть превращена в требуемый результирующий вывод.

Предположим, что перед всеми формулами, написанными ранее, чем формула $\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_k$, в упомянутой последовательности (I) уже сделаны надлежащие вставки. Рассмотрим теперь, в зависимости от того, какой из пяти случаев имеет место для формулы $\mathbf{B}_k$ вспомогательного вывода, что следует вставить перед формулой $\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_k$ последовательности (I).

Случай 1. Так как в соответствии с аксиомной схемой A1 формула

$$\mathbf{B}_k \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_k)$$

является аксиомой, то требуемая вставка состоит из двух формул вида

$$\mathbf{B}_k;$$

$$\mathbf{B}_k \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_k),$$

из которых формула

$$\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_k$$

следует по правилу МП.

Случай 2 рассматривается аналогично.

Случай 3 также рассматривается аналогично предшествующим случаям, с той лишь разницей, что вхождение формулы во вставку мотивируется тем, что $\mathbf{B}_k$ является одним из допущений $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$, каждое из которых, очевидно, может быть написано в результирующем выводе.

Случай 4. Так как $\mathbf{B}_k$ есть $\mathbf{A}_n$, то $\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_k$ совпадает с формулой $\mathbf{A}_n \to \mathbf{A}_n$, которую в силу замечания на с. 311 можно считать ранее доказанной.

Случай 5. Так как формула $\mathbf{B}_k$, следует из ранее написанных формул $\mathbf{B}_i$ и $\mathrm{B}_i — \mathbf{B}_k$ по правилу МП, то в последовательности (I), превращаемой в требуемый результирующий вывод, формулам $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{B}_i \to \mathbf{B}_k$ отвечают формулы

$$(1) \quad \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_i;$$

$$(2) \quad \mathbf{A}_n \to (\mathbf{B}_i \to \mathbf{B}_k).$$

Требуемая вставка состоит из следующих двух формул:

$$(3) \quad (\mathbf{A}_n \to (\mathbf{B}_i \to \mathbf{B}_k)) \to ((\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_i) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_k));$$

$$(4) \quad (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_i) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_k).$$

Из входящей во вставку формулы (4) и ранее написанной в последовательности (I) формулы (1) формула $\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_k$, перед которой делается вставка, следует по правилу МП; в свою очередь по этому же правилу, формула (4) из вставки следует из формулы (3), которая по A2 является одной из аксиом системы $\boldsymbol{H}$, и ранее написанной в последовательности (I) формулы (2).

Очевидно, что пользуясь описанным методом, мы можем шаг за шагом сделать все вставки в последовательности (I) и превратить ее по осуществлении вставки на l-м шаге в требуемый результатирующий вывод.

Заметим, что, перестраивая вспомогательный вывод в результирующий, мы пользуемся тем обстоятельством, что отрезок

$$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_k$$

вспомогательного вывода при любом $k = 1, 2, \ldots, l$ можно рассматривать в качестве самостоятельного вывода

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n/\mathbf{B}_k,$$

который мы описанным выше эффективным способом превращаем на k-м шаге процесса перестройки в вывод

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}/\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_k.$$

Из теоремы 3 непосредственно вытекает

Следствие. *Для того чтобы в системе* ***H*** *построить доказательство формулы*

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ldots (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}) \ldots),$$

достаточно построить в системе ***H*** *вывод*

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n/\mathbf{C}.$$

В самом деле, построив данный вывод, мы, применяя n раз метод, содержащийся в доказательстве теоремы 3, получим требуемое доказательство.

Установленная выше дедукционная теорема верна, как это видно из ее доказательства, для любого исчисления высказываний гильбертовского типа, в котором единственным правилом вывода служит МП и доказуемы формулы A1, A2. Эта теорема существенно облегчает поиск доказательств теорем в системе ***H***, так как теперь мы можем воспользоваться услугами метода введения допущений, широко применяемого в системах естественного вывода.

Обычно доказательство в ***H*** получаемое с помощью дедукционной теоремы, оказывается излишне усложненным за счет наличия в нем избыточных фрагментов. Но эту цену мы вынуждены платить за общность и эффективность метода. К тому же, после того как доказательство дедукционной теоремы найдено, его, как правило, нетрудно упростить.

С помощью дедукционной теоремы легко показать, что выбросив A10 из списка аксиомных схем системы ***H*** мы получим систему, равнообъемную ***H***. Для этого достаточно построить вывод $\mathbf{A}, \sim\mathbf{A}/\mathbf{B}$, не пользуясь при этом, разумеется, A10. В качестве полезного упражнения мы предлагаем читателю построить упомянутый вывод, а затем, применяя метод дедукционной теоремы, преобразовать его в доказательство формулы $\mathbf{A} \to (\sim\mathbf{A} \to \mathbf{B})$. Таким образом, в системе ***H*** можно было бы обойтись без аксиомной схемы A10. Включение же ее в состав аксиомных схем системы ***H*** продиктовано необходимостью проводить в этой системе различие между конструктивными и неконструктивными доказательствами аналогично тому, как это мы делали выше в системе ***N*** естественного вывода.

Чтобы завершить установление равнообъемности систем ***H*** и ***N*** остается доказать следующее предложение.

Лемма 6. *Любое доказательство в системе* ***N*** *можно преобразовать в одноименное доказательство в системе* ***H***.

Доказательство этого предложения мы предоставляем провести читателю, используя дедукционную теорему и лемму 5. План доказательства состоит в следующем. Пусть **D** — произвольное доказательство в системе ***N*** формулы вида

$$\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ \dots \ (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}) \dots)$$

(случай $n = 0$ не исключается).

В предположении, что доказательства формул, вписанных в качестве ранее доказанных, уже преобразованы в одноименные доказательства в системе ***H***, нужно показать, как преобразовать **D** в одноименное доказательство в ***H***, рассмотрев следующие случаи а) **D** — прямое доказательство и б) **D** — косвенное доказательство. Заметим, что случай б) потребует выявления некоторых дальнейших подслучаев.

Из замечания на с. 311 и леммы 6 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Системы* ***H*** *и* ***N*** *равнообъемны (эквивалентны).*

На основании этой теоремы свойство семантической полноты, установленное в предыдущем параграфе для системы ***N*** распространяется теперь и на систему ***H***, т. е. каждое логическое тождество доказуемо в ***H***.

Семантическую корректность системы ***H*** устанавливает следующая теорема.

Теорема 5. *Если формула* ***F*** *доказуема в системе* ***H***, *то* ***F*** *тождественно-истинна.*

Доказательство теоремы 5 сводится к проверке того, что любая аксиома системы ***H*** есть логическое тождество и что если посылки **A**, **A → B** правила МП суть логические тождества, то заключение **B**, получаемое по данному правилу, также есть логическое тождество. Предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно, пользуясь табличным методом.

Из теорем 4 и 5 непосредственно вытекает семантическая корректность системы ***N*** естественного вывода, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Следствие. *Любая формула, доказуемая в системе* ***N***, *тождественно-истинна.*

Очевидно также, что семантически корректны и все рассмотренные выше подсистемы системы ***N***. Но ни одна из них не является полной относительно класса тождественно-истинных формул.

Непротиворечивость является непременным требованием, которое предъявляется к системе способов рассуждения, применяемых в науке. «„Логической противоречивости",— при условии, конечно, правильного логического мышления — не должно быть *ни* в экономическом *ни* в политическом анализе».[38]

Непротиворечивость логической системы естественно определить так: система называется непротиворечивой, если в ней недоказуемы некоторая формула и ее отрицание. Иначе говоря, в непротиворечивой системе не найдется пары формул **A**, $\sim$***A***, из которых каждая доказуема в данной системе.

Для системы, в которой доказуема формула

$$\mathbf{A} \rightarrow (\sim \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}),$$

сформулированный критерий непротиворечивости эквивалентен следующему: система называется непротиворечивой, если существует хотя бы одна формула, недоказуемая в данной системе. Действительно, если бы в ней можно было найти доказательства каких-то формул **A**, $\sim$**A**, то с помощью МП мы на основании данной формулы смогли бы построить доказательство любой формулы **B**. Заметим, что для логических систем, не содержащих знака отрицания, применяется эта вторая форма критерия непротиворечивости.

Из свойства семантической корректности системы вытекает непротиворечивость данной системы. Действительно, если в логической системе доказуема какая-то пара формул **A**, $\sim$**A**, то данная система не является семантически корректной, так как формулы **A**, $\sim$**A**, очевидно, не могут быть обе тождественно-истинными. Поэтому если логическая система семантически корректна, то она и непротиворечива.

Логическую систему называют разрешимой теорией, если для нее существует эффективный метод, позволяющий конечным числом достаточно простых действий для любой формулы ответить на вопрос, доказуема она или нет в данной системе. Этот эффективный метод называют разрешающей процедурой или разрешающим алгоритмом.

Из результатов проделанного рассмотрения систем ***N*** и ***H*** классической логики высказываний следует, что они являются разрешимыми теориями; при этом разрешающей процедурой для них служит табличный метод. Действительно, для любой предъявленной формулы мы в состоянии построить ее таблицу. Если в результате построения таблицы будет установлено, что испытываемая формула тождественно-истинна, то по теореме о полноте (теорема 2 из § 22) она доказуема и можно эффективно построить ее доказательство. Если же окажется, что испытываемая формула не является тождественно-истинной, то по теореме о семантической корректности (теорема 5 настоящего параграфа) данная формула не доказуема.

Система ***H*** — аксиоматическое представление логики высказываний, так же как и система ***N*** естественного вывода,

---

[38] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 30, с. 91.

построена в форме иерархии частичных систем (подсистем). Аксиомные схемы A1, A2 вместе с правилом МП образуют положительное импликативное исчисление. Далее, система ***H*** без аксиомных схем A9, A10, $A10^0$ — это исчисление положительной логики. Минимальной логике отвечает фрагмент системы ***H***, не содержащий аксиомных схем A10, $A10^0$. Наконец, исчисление конструктивной логики получается из ***H*** выбрасыванием аксиомной схемы $A10^0$.

Для системы ***H*** можно доказать теорему, устанавливающую допустимость в ***H*** правила эквивалентной замены. (Формулы **A**, **B** называются эквивалентными, если доказуема формула $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$).

Согласно этому правилу, если формулы **A**, **B** эквивалентны, то, заменив в какой-то формуле **F** одно или более вхождений **A** вхождением **B**, мы получим некоторую формулу **G**, эквивалентную первоначальной формуле **F**.

На основании установленных в § 21 эквивалентностей,[39] можно посредством правила эквивалентной замены показать, что принимаемые в качестве исходных в системе ***H*** логические знаки $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ не являются независимыми в системе ***H*** в следующем смысле: для любой формулы можно найти эквивалентную формулу, не содержащую других логических знаков, кроме тех, которые принадлежат только одной из следующих групп:

$$1)\ \rightarrow,\ \sim;\quad 2)\ \vee,\ \sim;\quad 3)\ \wedge,\ \sim.$$

Известно много формализующих классическую логику высказываний систем гильбертовского типа, в которых исходные логические знаки независимы. К ним, в частности, относятся импликативно-негативные системы (т. е. системы, принимающие $\rightarrow$, $\sim$ в качестве исходных логических знаков), конъюнктивно-негативные, дизъюнктивно-негативные и т. п.

Приведем в качестве примеров несколько импликативно-негативных систем. Классическая логика высказываний была впервые аксиоматизирована в 1879 г. немецким ученым Г. Фреге в виде системы, содержащей шесть следующих аксиом:

1. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$.
2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.
3. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$.
4. $p \rightarrow \sim\sim p$.
5. $\sim\sim p \rightarrow p$.
6. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$.

Польский логик Я. Лукасевич показал, что аксиома 3 избыточна, так как ее можно вывести из первых двух аксиом. Он

---

[39] См. выше, с. 300.

также показал, что в системе Фреге последние три аксиомы можно заменить формулой $(\sim q \to \sim p) \to (p \to q)$.

Иными словами, Я. Лукасевич установил эквивалентность системы Фреге более простой системе, содержащей три аксиомы:

1. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.
2. $p \to (q \to p)$.
3. $(\sim q \to \sim p) \to (p \to q)$.

Из систем классической логики, построенных и изученных Я. Лукасевичем, упомянем еще одну, содержащую следующие аксиомы:

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$.
2. $(\sim p \to p) \to p$.
3. $p \to (\sim p \to q)$.

Известны также импликативно-негативные системы с единственной аксиомой.

В импликативно-негативных системах остальные логические знаки вводятся с помощью определений, например,

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \underset{df}{=} \sim (\mathbf{A} \to \sim \mathbf{B});$$

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \underset{df}{=} \sim \mathbf{A} \to \mathbf{B}$$

или

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \underset{df}{=} (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{B}.$$

В заключение этого параграфа скажем несколько слов о процедуре установления недоказуемости или отбрасывания формул в классической логике высказываний. Согласно теореме о семантической корректности (теореме 5 данного параграфа) мы можем воспользоваться табличным методом для установления недоказуемости формул в классическом исчислении высказываний, так как из указанной теоремы непосредственно следует, что ни одна не тождественно-истинная формула не доказуема в этом исчислении.

Но, как показал Я. Лукасевич, если к классическому исчислению высказываний добавить

(a) правило отбрасывания через подстановку: если результат подстановки в формулу **A** отбрасывается, то отбрасывается и **A**;

(b) правило отбрасывания через отделение: если формула **A** → **B** доказуема, а формула **B** отбрасывается, то отбрасывается и формула **A**;

(c) аксиому отбрасывания: некоторая пропозициональная буква, скажем, p, отбрасывается,

то с помощью этих правил можно будет отбросить все те, и только те, формулы, которые не являются тождественно-истинными.

П р и м е р. Следующая последовательность формул показывает, что формулы, написанные в строках, отмеченных звездочками, отбрасываются:

*1.	p	аксиома отбрасывания
2.	$(\sim p \to p) \to p$	р. д. ф.
*3.	$\sim p \to p$	(b): 2, 1
*4.	$p \to q$	(a): 3
5.	$\sim p \to (p \to q)$	р. д. ф.
*6.	$\sim p$	(b): 5, 4
7.	$\sim (p \wedge p) \to \sim p$	р. д. ф.
*8.	$\sim (p \wedge p)$	(b): 7, 6
9.	$\sim (p \wedge q)$	(a): 8

Запись ≪(b):2,1≫ в строке 3 означает, что формула в данной строке отбрасывается по правилу отбрасывания через отделение на основании того, что написано в строках 2,1. Далее, запись ≪(a):3≫ в строке 4 указывает на то, что формула здесь отбрасывается по правилу отбрасывания результата подстановки в данную формулу и т. п.

Мы уже говорили, что в логике высказываний не входят в рассмотрение структуры элементарных высказываний. Дальнейшие шаги в анализе логических законов связаны с проникновением, так сказать, в «микроструктуру» элементарных высказываний и с введением в рассмотрение новых логических операторов — к в а н т о р о в, посредством которых образуются общие и частные высказывания. Это приводит к более богатой логической теории, называемой л о г и к о й п р е д и к а т о в и содержащей в качестве части логику высказываний. Системы логики предикатов обычно строятся, как расширение систем логики высказываний путем добавления специфичных для них законов или правил. С логикой предикатов мы познакомимся в главе V.

В следующей же главе мы рассмотрим, используя методы символической логики, силлогистику — уже известную читателю логическую теорию, связанную с некоторым частным способом анализа «микроструктуры» элементарных высказываний.

У п р а ж н е н и я:

I. Показать, что система Фреге равнообъемна первой из приведенных выше систем Я. Лукасевича.

II. Доказать результат В. И. Гливенко: если формула (логики высказываний) **A** тождественно-истинна, то $\sim\sim$**A** доказуема в конструктивном исчислении высказываний, скажем в N^{cn}; при этом любая тождественно-истинная формула вида $\sim$**B** доказуема в N^{cn}.

У к а з а н и е. Сначала надо показать, что любую последовательность формул, получаемую из некоторого доказательства **D** в системе H приписыванием слева к каждой формуле, входящей в **D**, двух смежных знаков отрицания, можно преобразовать в одноименное доказательство в конструктивной части системы H, т. е. в системе, получаемой из H выбрасыванием аксиомной схемы А 10⁰. При этом следует использовать то обстоятельство, что формула $\sim\sim(\mathbf{A}\to\mathbf{B})\to(\sim\sim\mathbf{A}\to\sim\sim\mathbf{B})$ является теоремой конструктивного исчисления высказываний.

III. Пользуясь результатом В. И. Гливенко, доказать следующий результат К. Геделя: любая тождественно-истинная формула, не содержащая других логических знаков, кроме $\vee$ и $\sim$, доказуема в конструктивном исчислении высказываний.

IV. Используя теорему о семантической полноте классического исчисления высказываний (см. теорему 2 § 22), показать, что если формула $\mathbf{A}$ отбрасывается согласно приведенным выше правилам (a), (b), (c), то $\mathbf{A}$ не есть логическое тождество.

V. Показать, что если к системе H' добавить в качестве новой аксиомы любую не тождественно-истинную формулу, то описанное расширение системы H' будет противоречивой системой.

Глава IV

ФОРМАЛИЗОВАННАЯ СИЛЛОГИСТИКА

В созданной Аристотелем теории категорического силлогизма, называемой также силлогистикой, рассматриваются правила логического следования, посылками и заключением которых служат четыре формы высказываний:

(1) *Все S суть P*;

(2) *Ни одно S не есть P*;

(3) *Некоторые S суть P*;

(4) *Некоторые S не суть P*,

где буквы S, P, называемые силлогистическими переменными, стоят вместо общих и непустых терминов, роль которых в обычной речи играют слова или сочетания слов, выражающие понятия (например, «камень», «планета Солнечной системы», «дерево», «растение», «животное», «человек», «число», «четное число», «простое число, не равное двум» и т. д.).

Эти формы высказываний, после замещения букв конкретными терминами превращаются в высказывания, т. е. предложения, выражающие (истинные или ложные) суждения.[40]

Пример. Если подставить в (1)—(4) некоторые из перечисленных выше терминов, то получим предложения:

(1′) *Все деревья суть растения*;

(2′) *Ни одно простое число, не равное двум, не есть четное число*;

(3′) *Некоторые растения суть деревья*;

(4′) *Некоторые деревья не суть растения*,

из которых последнее выражает ложное суждение.

Известно много логических систем, формализующих силлогистику; из них наиболее простой и естественной считается система Я. Лукасевича.[41]

Перечень исходных знаков формализованного языка силлогистики содержит следующие знаки.

1. Силлогистические переменные: S, P, M, S_1, P_1, M_1 и т. д.
2. Логические знаки: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, a, i.
3. Левую и правую скобки: (,).

В п. 2 последние два знака — силлогистические константы, остальные — пропозициональные связки.

Определение силлогистической формулы.

---

[40] При этом, естественно, предполагается, что при замещении термины принимают надлежащую грамматическую форму, обеспечивающую согласование со словами, входящими в формы высказываний (1) — (4).

[41] Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.

1. Если **S**, **P** суть силлогистические переменные, [42] то каждое из следующих выражений:

$$\mathbf{SaP};$$
$$\mathbf{SiP}$$

есть силлогистическая формула.

2. Если **A**, **B** суть силлогистические формулы, то каждое из следующих выражений:

$$\sim\mathbf{A};$$
$$(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B});$$
$$(\mathbf{A}\vee\mathbf{B});$$
$$(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B});$$

есть силлогистическая формула.

3. Выражение считается силлогистической формулой тогда, и только тогда, когда оно может быть построено в соответствии с пп. 1—2.

Силлогистические формулы следующих видов: **SaP** (читается: «все **S** суть **P**»), **SiP** (читается: «некоторые **S** суть **P**»), $\sim$**SaP** (читается: «не все **S** суть **P**»), $\sim$**SiP** (читается: «неверно, что некоторые **S** суть **P**») мы будем называть *элементарными формулами силлогистики.*

Формы общеотрицательного и частноотрицательного высказываний вводятся с помощью определений:

$$\mathbf{SeP} \underset{df}{=} \sim\mathbf{SiP};$$

$$\mathbf{SoP} \underset{df}{=} \sim\mathbf{SaP}.$$

Таким образом, согласно первому из этих определений **SeP** (читается: «ни одно **S** не есть **P**») имеет тот же смысл, что и $\sim$**SiP**. Второе же определение означает, что выражение **SoP** (читается: «некоторые **S** не суть **P**») совпадает по смыслу с выражением $\sim$**SaP**. Логический знак $\leftrightarrow$ также вводится по определению, как выше.

Из определения следует, что силлогистическая формула может быть получена из формулы логики высказываний подстановкой вместо пропозициональных букв элементарных формул силлогистики. Образно говоря, «макроструктура» силлогистической формулы совпадает со структурой формулы логики высказываний.

Описываемая ниже система ***S*** дает представление силлогистики в виде логического исчисления естественного вывода. Система ***S*** содержит:

---

[42] Полужирные прямые буквы **S**, **P**, **M** здесь и в дальнейшем используются в качестве метапеременных для силлогистических переменных.

I. Аксиомы и правила следования.

Аксиомами в системе являются формулы следующих видов:

S1. MaP → (SaM → SaP);

S2. MaP → (MiS → SiP);

S3. SaS — первый закон тождества;

S4. SiS — второй закон тождества.

Схемы правил следования в системе *S* совпадают с соответствующими схемами в системе *N*, описанной в § 16 гл. III.

II. Правила построения доказательства в системе *S* дословно переносятся из описания системы *N*; при этом п. 1) этих правил дополняется упоминанием об аксиомах в *S*, т. е. формулируется следующим образом:

1) Одну из формул A_1, A_2, ..., A_n в качестве допущения или одну из аксиом: S1, S2, S3, S4.

Формула называется доказуемой формулой системы *S*, или теоремой силлогистики, если в системе *S* можно построить доказательство данной формулы.

Из определения силлогистической формулы и правил построения доказательства в системе *S* следует, что любое выражение, которое может быть получено (одновременной), подстановкой в доказуемую формулу логики высказываний вместо всех вхождений пропозициональных букв произвольных силлогистических формул, есть теорема силлогистики. Поэтому установленные в предыдущем параграфе теоремы и производные правила можно некоторым очевидным образом перенести в силлогистику.

Число теорем и производных правил описанной выше системы обобщенной силлогистики ничем не ограничено. Рассмотрим некоторые из них.

Легко понять, что относительно S1 и S2 производны правила, называемые в традиционной логике модусами Barbara и Datisi соответственно:

$$\text{Barbara}\quad \frac{\text{MaP SaM}}{\text{SaP}},$$

$$\text{Datisi}\quad \frac{\text{MaP MiS}}{\text{SiP}}.$$

S5. SaP → SiP — первый закон подчинения.

Доказательство.

1. SaP допущ.;
2. SiS аксиома; S4

SiP Datisi (1, 2).

Относительно S5 производно первое правило подчинения:

$$(a/i) — \text{подч.}\ \frac{SaP}{SiP}$$

S6. $SiP \to PiS$ закон i-обращения.

Доказательство.

1. SiP допущ.
2. SaS аксиома, S3

PiS Datisi (2, 1).

Относительно S6 производно правило i-обращения:

$$\text{i-обращ.}\ \frac{SiP}{PiS}.$$

S7. $SaP \to PiS$ закон a-обращения.

Доказательство.

1. $SaP \to SiP$ р. д. ф., S5;
2. $SiP \to PiS$ р. д. ф., S6;

$SaP \to PiS$ Сил (1, 2).

Относительно S7 производно правило a-обращения:

$$\text{a-обращ.}\ \frac{SaP}{PiS}.$$

S8. $SeP \to SoP$ второй закон подчинения.

Доказательство.

1. $(SaP \to SiP) \to (\sim SiP \to \sim SaP)$ р. д. ф., T17
2. $SaP \to SiP$ р. д. ф., S7
3. $\sim SiP \to \sim SaP$ МП (1, 2)

$SeP \to SoP$ *Df* (3)

Относительно S8 производно второе правило подчинения

$$(e/o) — \text{подч.}\ \frac{SeP}{SoP}.$$

S9. $SeP \to PeS$ закон e-обращения

Относительно S9 производно правило e-обращения

$$\text{e-обращ.}\ \frac{SeP}{PeS}$$

S10. $SeP \leftrightarrow \sim SiP$

S11. $SoP \leftrightarrow \sim SaP$

S12. $SaP \leftrightarrow \sim SoP$

S13. $SiP \leftrightarrow \sim SeP$

S14. $MaP \to (SiM \to SiP)$

Доказательство

$$
\begin{array}{lll}
1. & MaP & \rbrace \text{ допущ.;} \\
2. & SiM & \\
3. & MiS & \text{i-обращ. (2);} \\
 & SiP & \text{Datisi (1, 3).}
\end{array}
$$

Относительно S14 производно правило, традиционное название которого — модус

$$\text{Darii } \frac{MaP \quad SiM}{SiP}.$$

S15. $MeP \to (SaM \to SeP)$.

Доказательство.

$$
\begin{array}{lll}
1. & MeP & \rbrace \text{ допущ.} \\
2. & SaM & \\
3. & \sim SeP & \text{допущ. косв. док.} \\
4. & \sim\sim SiP & \text{Df (3)} \\
5. & SiP & \text{ДО (4)} \\
6. & MiP & \text{Datisi (5, 2)} \\
7. & \sim MiP & \text{Df (1)} \\
 & \text{Пртврч: } 6, 7 &
\end{array}
$$

Относительно S14 производен модус

$$\text{Celarent } \frac{MeP \quad SaM}{SeP}.$$

S16. $MeP \to (SiM \to SoP)$.

Доказательство.

$$
\begin{array}{lll}
1. & MeP & \rbrace \text{ допущ.} \\
2. & SiM & \\
3. & \sim SoP & \text{допущ. косв. док.} \\
4. & \sim\sim SaP & \text{Df (3)} \\
5. & SaP & \text{ДО (4)} \\
6. & MiP & \text{Datisi (5, 2)} \\
7. & \sim MiP & \text{Df (1)} \\
 & \text{Пртврч; } 6, 7 &
\end{array}
$$

Относительно S15 производен модус

$$\text{Ferio } \frac{MeP \quad SiM}{SoP}.$$

S17. $MaP \to (SaM \to SiP)$.

S18. $MeP \to (SaM \to SoP)$.

Относительно S16, S17 производны правила

$$\text{Barbari}\ \frac{MaP\ SaM}{SiP};$$

$$\text{Celaront}\ \frac{MeP\ SaM}{SoP},$$

которые относятся к числу так называемых «слабых» модусов.

Обоснованные выше модусы, кроме Datisi, относятся к так называемой первой фигуре. Эти модусы имеют общую структуру в том смысле, что могут быть построены по следующей схеме (схемы первой фигуры):

$$\frac{M\alpha P\ S\beta M}{S\gamma P},$$

где метапеременные α, β, γ стоят вместо констант a, e, i, o. Замещая в этой схеме буквы α, β, γ всевозможными трехчленными наборами из букв a, e, i, o, т. е. наборами aaa, aae, aai, aao ... (всего их 64), мы получим 64 модуса первой фигуры, из которых правильными являются только шесть обоснованных выше модусов.

Остальные 58 модусов являются неправильными в том смысле, что схемы их не являются схемами логически корректного правила (кратные импликации, отвечающие этим неправильным модусам, недоказуемы в системе *S*).

Кроме модусов первой фигуры, можно рассмотреть модусы второй, третьей и четвертой фигур, которые строятся соответственно по следующим схемам:

2 фиг.	3 фиг.	4 фиг.
$\frac{P\alpha M\ S\beta M}{S\gamma P}$	$\frac{M\alpha P\ M\beta S}{S\gamma P}$	$\frac{P\alpha M\ M\beta S}{S\gamma P}$

В каждой из фигур имеется ровно 6 правильных модусов. Таким образом, из 256 модусов, построенных по схемам всех четырех фигур, только 24 модуса являются правильными.

Мы приводим их мнемотехнические названия, по которым читатель без труда сможет построить схемы этих модусов, замещая надлежащим образом в схемах соответствующих фигур буквы α, β, γ гласными, входящими в названия модусов. Как мы уже знаем, к правильным модусам первой фигуры относятся: Barbara, Celarent, Darii, Ferio, [Babari, Celaront].[43] Правильными модусами второй группы являются: Cesare, Camestres, Festino, Baroco, [Cesaro, Cameostro]; далее правильными

[43] Здесь и ниже в квадратных скобках заключены названия «слабых» модусов.

модусами третьей фигуры будет: Darapti, Felapton, Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison, из которых четвертый мы уже установили; наконец, к правильным модусам четвертой фигуры относятся: Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison, [Camenо].

Задача обоснования правильных модусов, построенных по схемам четырех фигур, сводится, таким образом, к нахождению доказательств всех силлогистических теорем, представимых в виде

$$\mathbf{E} \to (\mathbf{F} \to \mathbf{G}),$$

где **E**, **F** — посылки, а **G** — заключение соответствующего модуса.[44]

Предоставляем читателю завершить решение сформулированной выше задачи.

Известно, что в системе *S* можно построить доказательство всех истинных формул силлогистики, т. е., грубо говоря, всех тех формул, которые становятся истинными высказываниями при любой подстановке конкретных (общих и непустых) терминов вместо силлогистических переменных. Но в системе *S* нет правил, с помощью которых можно было бы устанавливать недоказуемость (в данной системе) силлогистических формул.

Аристотель, устанавливая «неправильность» соответствующих модусов, пользуется обычным приемом нахождения контрпримера. Этот прием состоит в указании таких конкретных терминов, подстановка которых вместо силлогистических переменных в соответствующую формулу вида

$$\mathbf{E} \to (\mathbf{F} \to \mathbf{G})$$

дает ложное высказывание. Но у Аристотеля имеется одно замечание, в котором можно видеть идею формальной процедуры установления недоказуемости, или отбрасывания ложных формул силлогистики (т. е. тех формул силлогистики, для которых можно найти контрпример). Эта идея была развита Я. Лукасевичем в концепцию правил отбрасывания.

Как показал Я. Лукасевич, если к логической системе силлогистики добавить правило (а) отбрасывания через подстановку,[45] правило (в) отбрасывания через отделение, а в качестве аксиом отбрасывания принять следующие две формулы:

$$\text{(c)}\quad \mathbf{PaM} \to (\mathbf{SaM} \to \mathbf{SiP});$$

$$\text{(d)}\quad \mathbf{PeM} \to (\mathbf{SeM} \to \mathbf{SiP}),$$

---

[44] Эта задача, если отвлечься от некоторых несущественных в данном случае исторических деталей, эквивалентна основной задаче, которую поставил и решил Аристотель.

[45] Подстановка в силлогистическую формулу состоит в замене всех вхождений силлогистической переменной вхождениями другой (или той же самой) силлогистической переменной. Подстановку можно производить и одновременно вместо нескольких различных силлогистических переменных.

то можно отбросить все 232 неправильных модуса силлогизма.

Но для отбрасывания всех ложных формул силлогистики, правил (а), (в) вместе с аксиомами отбрасывания (с), (d) недостаточно. Тем не менее, как показал Е. Слупецкий, ученик Я. Лукасевича, если к правилам (а), (в) добавить еще одно, которое будет сформулировано ниже, и принять (с) в качестве единственной аксиомы отбрасывания, то с помощью данной системы правил отбрасывания можно отбросить все недоказуемые формулы силлогистики.

Упомянутое дополнительное правило, называемое **правилом Слупецкого**, можно сформулировать так.

Пусть $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ суть элементарные отрицательные формулы силлогистики, т. е. формулы, представимые в одном из следующих видов:

$$\mathbf{SeP};\quad \mathbf{SoP},$$

а $\mathbf{F}$ — силлогистическая формула вида

$$\mathbf{G}_1 \to (\mathbf{G}_2 \to \ \ldots\ (\mathbf{G}_{n-1} \to \mathbf{G}_n)\ \ldots),$$

где $\mathbf{G}_i\,(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — произвольная элементарная формула силлогистики. Тогда, если формулы

$$\mathbf{E}_1 \to \mathbf{F},\ \mathbf{E}_2 \to \mathbf{F}$$

отбрасываются, то отбрасывается и формула

$$\mathbf{E}_1 \to (\mathbf{E}_2 \to \mathbf{F}).$$

11 Зак. 499

Глава V

ЕСТЕСТВЕННЫЙ ВЫВОД В ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ

Алфавит языка логики предикатов образуется присоединением к алфавиту языка логики высказываний новых исходных знаков.

Во-первых, мы расширяем перечень логических знаков добавлением двух знаков, называемых кванторами: $\forall$, $\exists$.

Знак $\forall$ (читается — все, всякий, каков бы ни был и т. п.) называется квантором всеобщности (общности).

Знак $\exists$ (читается — некоторые, хотя бы один, существует и т. п.) называется квантором существования.

Квантор всеобщности используется в логическом языке для выражения общих суждений, а квантор существования — для выражения частных суждений, называемых также суждениями существования.

Во-вторых, к алфавиту языка логики высказываний мы добавляем:

1) предметные, или индивидные, переменные: $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots$ и т. д.

2) символы n — местных ($n = 1, 2 \ldots$) предикатов, или n — местные предикатные буквы.

Символы предикатов образуются приписыванием к букве P верхнего $i = 1, 2, \ldots, \kappa, \ldots$ и нижнего $j = 1, 2, \ldots, l, \ldots$ числовых индексов.

Итак, мы имеем:
символы одноместных предикатов

$$P_1^1,\ P_2^1,\ P_3^1,\ \ldots \text{ и т. д.}$$

символы двухместных предикатов

$$P_1^2,\ P_2^2,\ P_3^2,\ \ldots \text{ и т. д.}$$

$$\vdots$$

и т. д.

Понятно, что в предикатных буквах верхний индекс указывает число их (аргументных) мест, а нижние индексы служат для различения предикатных букв с одинаковым числом мест.

Для того чтобы сделать формулы, содержащие предикатные буквы, лучше обозримыми, мы будем употреблять:

1) вместо символов одноместных предикатов буквы F, G, H, F_1, G_1, H_1, ... и т. д.;

2) вместо символов двухместных предикатов — Q, R, S, Q_1, ... и т. д.;

3) вместо символов трехместных предикатов — U, V, W, U_1, ..., и т. д.

В приложениях языка логики предикатов к анализу обычных логических рассуждений вместо предметных переменных можно подставлять собственные имена или какие-то другие обозначения (в частности, описания) отдельных предметов (индивидов)[46]. Вместо же предикатных букв подставляются слова или обороты речи, выражающие понятия о свойствах или отношениях.

Пример. Рассмотрим следующие предложения:

(1) *Солнце* светит.

(2) *Пушкин* — величайший русский поэт.

(3) *Число* 2^{46} очень велико.

(4) *Солнце* освещает *Землю.*

(5) *Пушкин* современник *Лобачевского.*

(6) 2^{64} больше 10^6.

(7) *Бологое* расположено между *Москвой и Ленинградом.*

(8) *Число* n^2 сумма первых n нечетных чисел.

(9) *Употребление спиртных напитков* причиняет вред *здоровью людей.*

Здесь слова или обороты, выделенные вразрядку, играют роль одноместных предикатов, выражающих понятия о свойствах, или многоместных предикатов, выражающих понятия об n-членных ($n \gg 2$) отношениях.

Так, в предложениях (4) — (6) и, возможно, в (9) фигурируют двухместные предикаты, а в предложении (7) посредством остова фразы *«...расположено между... и...»* выражается понятие о трехчленном отношении.

Свойства — это такие объективные характеристики или признаки предметов, которые присущи (или не присущи) отдельно взятым предметам. Отношения тоже являются объективными характеристиками предметов, но не отдельных предметов, а систем предметов или, как еще говорят, упорядоченных n-ок предметов.

Отражая эти объективные характеристики предметов, понятия о свойствах (соотв., об отношениях) в языке выражаются одноместными (соотв. многоместными) предикатами.

Продолжая описание языка логики предикатов, мы вводим понятие формулы логики предикатов, или предикатной формулы[47] с помощью следующего определения, которое дает способ построения объекта определяемого типа.

Определение предикатной формулы[48].

1. а) пропозициональная буква есть формула;

[46] Отсюда и название этих переменных. В дальнейшем мы обычно опускаем прилагательное «предметная» («индивидная») перед существительным «переменная», если не возникает недоразумений.

[47] Формулы логики высказываний называют также пропозициональными формулами.

[48] Ниже в определении в дальнейшем мы обычно опускаем прилагательное «предикатная» перед существительным «формула», когда из контекста ясно, о каких формулах идет речь.

б) выражение, состоящее из n-местной предикатной буквы с приписанной справа n-членной последовательностью предметных переменных (не обязательно различных), есть формула;

2. а) если **A**, **B** — формулы, то каждое из следующих выражений:

$$\sim \mathbf{A};$$
$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B});$$
$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B});$$
$$(\mathbf{A} \to \mathbf{C})$$

есть также формула;

б) если **A**—формула, **x**—предметная переменная, то каждое из следующиих выражений: $\forall\mathbf{x}\mathbf{A}$ (читается — «каково бы ни было **x**, имеет место **A**»); $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}$ (читается — «существует такое **x**, что имеет место **A**») есть формула.

3. выражение считается формулой тогда, и только тогда, когда оно может быть построено в соответствии с пп. 1—2.

Из определения непосредственно следует, что формула логики высказываний (или пропозициональная формула) является частным случаем формулы логики предикатов, или предикатиой формулы. Действительно, в новом определении формулы имеются дополнительные подпункты б) в пп. 1 и 2 по сравнению с определением формулы логики высказываний.

Формулы, определяемые в п. 1, определения предикатной формулы, называются элементарными.

Пример. Здесь приводятся некоторые элементарные формулы:

$$p,\ Fx,\ Gx,\ Rxy,\ Sxx,\ Uxyz.$$

Элементарная формула с одноместной предикатной буквой, скажем, формула Fx, читается: «x обладает свойством F» или, более коротко, «F от x»; элементарная формула с двухместной предикатной буквой, например, Rxy читается: «x находится в отношении R к y» или, короче, «R от x, y»; далее, элементарная формула с трехместной предикатной буквой, скажем, $Uxyz$ может быть прочитана: «x, y, z (в таком порядке) находятся в отношении R» или короче, «U от x, y, z» и т. п.

Иногда переменные, стоящие после предикатной буквы, заключают в скобки и разделяют запятыми. Так, вместо $Uxyz$ можно было бы написать $U(x, y, z)$. Кроме того, элементарные формулы с двухместными предикатными буквами записываются так: первую переменную ставят перед предикатной буквой, а вторую — после нее. Скажем, вместо Rxy пишут xRy. Этим способом записи элементарных формул мы также будем иногда пользоваться.

При построении выводов и доказательств средствами логики предикатов основную роль, как мы увидим ниже, будут играть понятия свободных и связанных вхождений переменных в формуле. Эти понятия можно также ввести с помощью определения.

Определение свободных и связанных вхождений переменных в формуле **F**.

1. **F** есть элементарная формула:

а) в **F** нет ни свободных, ни связанных вхождений переменных, если **F** — пропозициональная буква;

б) в **F** все вхождения переменных свободны, если **F** не является пропозициональной буквой.

2. **F** не есть элементарная формула:

а) формулу **F** можно представить в одном из следующих видов: $\sim \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, тогда в **F** свободны (соотв. связаны) те, и только те, вхождения переменных, которые происходят от свободных (соотв. связанных) вхождений переменных в **A** или **B**;

б) формулу **F** можно представить в одном из видов — $\forall x\mathbf{A}$, $\exists x\mathbf{A}$, тогда в **F** 1) все вхождения переменной x связаны; 2) вхождения остальных переменных свободны (соотв. связаны), если они происходят от свободных (соотв. связанных) вхождений переменных в **A**.

Из этого определения легко усмотреть, что вхождение переменной x в формулу **F** связано, если в **F** оно находится в подформуле, начинающейся квантором $\forall$ или $\exists$, за которым непосредственно следует переменная x и о котором говорят в данном случае, что он связывает переменную x.

В остальных случаях вхождение переменной x свободно в формуле **F**.

Пример. В формуле

$$\forall x (Rxy \rightarrow \exists y (Uxyz \wedge Qxy)) \vee \forall x \exists z_1 (Uxyz \wedge \exists x F x)$$

все вхождения переменной x связаны; первое и последние вхождения переменной y свободны, остальные вхождения переменной y связаны; все вхождения переменной z свободны и, наконец, единственное вхождение переменной z_1 связано.[49]

В дальнейшем параметрами формулы мы будем называть те переменные, которые имеют свободные вхождения в данной формуле. Так выше в примере параметрами рассматриваемой формулы являются y, z (но не x).

Как мы уже знаем, применяя логический аппарат к анализу обычных рассуждений и к решению логических задач, важно научиться записывать предложения обычного языка с помощью логической символики.

Ниже на нескольких простых примерах мы покажем, как это делается. При записи математических предложений мы для простоты всюду полагаем, что значениями содержащихся в них переменных служат натуральные (целые неотрицательные) числа.

---

[49] Напоминаем, что z и z_1 — это различные переменные.

Пример 1. Предложение *Существуют многолетние растения, которые цветут всего один раз* можно записать так: $\exists x$(*Многолетнее растение* (x) $\wedge$ *цветет один раз* (x)).

2. Арифметическое предложение *Всякое простое число, которое делит произведение* (*двух чисел*) *делит хотя бы один из сомножителей* запишется с помощью логической символики и математических знаков в следующем виде:

$$\forall x \forall y \forall z\ ((\textit{Простое}\ (x) \wedge (x\ \textit{Делит}\ y \cdot z)) \rightarrow ((x\ \textit{Делит}\ y) \vee \vee (x\ \textit{Делит}\ z))).$$

(читается: *каковы бы ни были числа x, y, z, если x простое и x делит y·z, то x делит y или x делит z*).

3. Предложение *Для всякого числа существует большее.* Можно выразить так:

$$\forall x \exists y\, (y > x)$$

(читается: *каково бы ни было* (*число*) *x существует* (*число*) *y такое, что y > x*), а предложение *Не существует числа, для которого нет большего* запишется в виде:

$$\sim \exists x \forall y \sim (y > x).$$

Приведенные два предложения эквивалентны.

В дальнейшем можно будет установить их эквивалентность с помощью исчисления предикатов.

4. Наконец, предложение *Никто не видел всех городов* можно записать в следующем виде:

$\forall x$ (*Человек* (x) $\rightarrow \sim \forall y$ (*Город* (y) $\rightarrow$ (x *Видел* y)))
читается: *каков бы ни был x, если x человек, то неверно, что для всякого y, если y город, то x видел y*).

Этому предложению эквивалентно следующее: *Для всякого человека существует город, которого он не видел.*

В свою очередь данное предложение с помощью логической символики запишется так:

$\forall x$ (*Человек* (x) $\rightarrow \exists y$ (*Город* (y) $\wedge \sim$ (x *Видел* y))).

Упражнения:

Записать с помощью логической символики следующие предложения:

1. Некто знает нечто.
2. Кто-то встретил кого-то, а кто-то так никого и не встретил.
3. Каждый второклассник прочитал хотя бы одну книгу.
4. Во всех славянских языках, кроме болгарского, имена существительные склоняются.
5. Каждое простое число, неравное двум, нечетно.
6. Существуют числа, не имеющие общих делителей, кроме единицы.
7. Система уравнений

$$x + y = 5$$
$$x \cdot y = 6$$

имеет решение.

8. Система уравнений

$$x + y = 5$$
$$2x \cdot y = 6$$

несовместна.

9. Существует бесконечно много простых чисел.

10. Две прямые, порознь параллельные третьей прямой, параллельны между собой.

При некотором выборе значений предикатных символов формулы со свободными вхождениями переменных, т. е. формулы, содержащие параметры, выражают условия, зависящие от этих параметров.

Пример. Ниже приводятся такого рода параметрические формулы, выражающие условия:

(1) $x < y$;

(2) $\exists y\,(x < y)$;

(3) $\forall x\,(x < y)$;

(4) $(x > 0) \to (x + y > y)$;

(5) $\forall y\,((x > 0) \to (x + y > y))$.

Подставляя в эти формулы на места свободных вхождений переменных наименования чисел, мы будем получать (истинные или ложные) высказывания, т. е. предложения, выражающие уже не условия, а определенные суждения.

Так, подставляя в формулу (1) 2 вместо x, 3 вместо y, мы получаем истинное арифметическое предложение: $2 < 3$, а подставляя, скажем, эти же числа в обратном порядке, т. е. 3 вместо x, 2 вместо y получаем ложь: $3 < 2$ и т. д.

Какое бы число мы не подставляли в формулу (2) вместо свободного вхождения, мы всегда будем получать истинное высказывание. Таким образом, формула (2) выражает всегда выполнимое арифметическое условие. В то же время легко убедиться, что формула (3) выражает невыполнимое условие, так как любой результат подстановки вместо свободного вхождения y, даст ложное высказывание. Очевидно также, что формулы (4), (5) выражают всегда выполнимые условия.

Связывая все свободные вхождения переменных в (1)—(5) с помощью кванторов, мы также получим формулы, не зависящие от параметров и выражающие (истинные или ложные) суждения.

Так, формула

$$(2') \quad \forall x \exists y\,(x < y)$$

выражает истинное, в то время как формула

$$(3') \quad \exists y \forall x\,(x < y)$$

выражает ложное суждение[50]. В то же время каждая из формул

$$(4') \quad \forall x \forall y ((x > 0) \rightarrow (x + y > y));$$

$$(5') \quad \forall y \forall x ((x > 0) \rightarrow (x + y > y))$$

есть истинное высказывание.

При записи общих математических предложений (утверждений) стоящие перед ними кванторы общности обычно опускают. Так, вместо (4′), (5′) пишут (4), вместо (2′) пишут (2).

Но вместо (2′) нельзя написать $x < y$, так как с точки зрения принимаемой при опускании кванторов интерпретации всеобщности $x < y$ выражает ложное суждение

$$\forall x \forall y (x < y).$$

Для того чтобы приступить к формулировке натурального исчисления предикатов, нам осталось определить о п е р а ц и ю п о д с т а н о в к и в м е с т о п р е д м е т н ы х п е р е м е н н ы х.

Подстановкой в формулу **A** переменной **y** вместо переменной **x** называется замещение в **A** всех свободных вхождений **x** вхождениями **y**. Результат подстановки в формулу **A** мы обозначаем посредством $|\mathbf{A}|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$. Если **x** не входит свободно[51] в **A**, то мы считаем, что $|\mathbf{A}|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$ совпадает с **A**. Очевидно, что если **y** совпадает с **x**, то $|\mathbf{A}|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$ также совпадает с **A**, т. е. в этом случае подстановка не изменяет формулу, в которую производится подстановка.

Подстановка **y** в **A** вместо **x** называется к о р р е к т н о й, если ни одно введенное данной подстановкой вхождение **y**, не оказывается связанным в $|\mathbf{A}|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$. Иначе говоря, вводимое подстановкой вхождения переменной не должно попадать в область действия квантора, связывающего данную переменную.

В правильных рассуждениях некорректная подстановка недопустима, так как она может привести к ложным утверждениям. Поясним сказанное на простом примере. Мы знаем, что формула $\exists y (x < y)$ выражает всегда выполнимое арифметическое условие, т. е. условие, которому удовлетворяет любое численное значение переменной. Но некорректная подстановка y вместо x в данную формулу дает высказывание $\exists y (y < y)$, выражающее ложное суждение.

В дальнейшем всюду имеется в виду только корректная подстановка.

Теперь мы уже в состоянии приступить к рассмотрению системы естественного вывода в логике предикатов (натурального

---

[50] (3′) означает, что существует число большее любого числа (в том числе и самого себя).

[51] Т. е. или вообще не входит, или входит связано.

исчисления предикатов). Описание этой системы получается из описания системы N естественного вывода в логике высказываний [52] добавлением к правилам [I] правил введения и удаления кванторов.

Ниже в схемах правил **A**, **C** — формулы, **x**, **y** — переменные $|\mathbf{A}|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$ — результат корректной подстановки **y** в **A** вместо **x**:

$$\text{ВВ}\ \frac{|\mathbf{A}|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}}{\forall\mathbf{x}\mathbf{A}}.\qquad \text{УВ}\ \frac{\forall\mathbf{x}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}}.$$

$$\text{ВС}\ \frac{|\mathbf{A}|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}}{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}}.\qquad \text{УС}\ \frac{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}\quad |\mathbf{A}|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}\to\mathbf{C}}{\mathbf{C}}.$$

Правило ВВ называется введением всеобщности, правило ВС — введением существования, и, наконец, правило УС — удаление существования. Можно заметить известную аналогию между ВВ, УВ и ВК, УК, с одной стороны, и ВС, УС и ВД, УД — с другой.

Переменная, обозначенная в схемах правил ВВ и УС посредством **y**, называется собственной переменной этих правил. При построении доказательств правила ВВ и УС применяются с ограничениями, относящимися к собственной переменной.

Ограничения на применения правил ВВ, УС.

I) При построении доказательства правило ВВ применяется, если выполняются следующие условия: 1) собственная переменная данного правила не входит свободно в формулы, написанные ранее в качестве допущений (в том числе и в качестве допущения косвенного доказательства); 2) собственная переменная не входит свободно в формулу, обозначенную в схеме правила посредством $\forall\mathbf{x}\mathbf{A}$ (т. е. в заключение данного правила).

II) При построении доказательства правило УС применяется, если выполняются следующие условия: 1) собственная переменная данного правила не входит свободно в формулы, ранее написанные в качестве допущений (в том числе и в качестве допущения косвенного доказательства); 2) собственная переменная не входит свободно ни в формулу, обозначенную посредством $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}$, ни в формулу, обозначенную посредством **C**, в схеме правила УС (т. е. ни в левую посылку, ни в заключение данного правила).

Правило УВ можно охарактеризовать как правило логического перехода от общего предложения к рассмотрению его частного случая. Например, рассуждение: *Для всякого числа существует большее. Следовательно, существует число, большее* 2^{64} протекает в соответствии со схемой правила УВ.

---

[52] См. выше, с. 278.

Используя логическую символику и математические знаки, приведенное выше рассуждение можно представить в следующем виде:

1. $\forall x \exists y (x < y)$ посылка
$\exists y (2^{64} < y)$ УВ (1)

Рассмотрим теперь правило ВВ. Оно позволяет переходить от предложения, выражающего условие, к общему предложению, если от параметра данного условия не зависят: 1) ни допущения доказательства, 2) ни заключение данного правила. Поясним сначала существенность второго ограничения на применение правила ВВ. Так, логически некорректный (ошибочный) переход от истинного арифметического равенства $y = y$ к ложной арифметической формуле $\forall x\ (x = y)$, означающей, что любые числа равны между собой, объясняется, как нетрудно убедиться, тем, что y, как собственная переменная данного правила, входит свободно в $\forall x (x = y)$, т. е. $\forall x (x = y)$ зависит от параметра y. В то же время переход

1. $y = y$ аксиома равенства,
$\forall x (x = x)$ ВВ (1)

разумеется, является корректным. Проиллюстрируем теперь существенность второго ограничения на применение правила ВВ. Взяв в качестве допущения неравенство

(1) $x > 0$ допущ.,

мы, пользуясь известными законами арифметики, можем вывести из (1) следующее неравенство:

(2) $x + y > 0$.

Но если бы мы захотели продолжить рассуждение с помощью ВВ, нарушая при этом первое ограничение на применение данного правила, скажем, присоединением строки

(3) $\forall z (z + y > 0)$,

то наше «рассуждение» оказалось бы ошибочным, так как из того, что $x > 0$ отнюдь не следует, что сумма любых двух чисел больше нуля.

Правило УС связано со следующим способом рассуждения. Располагая предложением $\exists x\mathbf{A}$, утверждающим существование предмета (объекта), удовлетворяющего условию $\mathbf{A}$, мы допускаем, что таким объектом является, скажем, объект, представленный параметром $\mathbf{y}$, от которого не зависят ни допущение доказательства, ни предложение $\exists x\mathbf{A}$. Затем, получив условное предложение (импликацию) $|\mathbf{A}|^{x}_{\mathbf{y}} \to \mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$ также не зависит от параметра $\mathbf{y}$, мы с помощью правила УС переходим к заключению $\mathbf{C}$. Покажем на примере, как нарушение ограничения, требующего независимости **C** в схеме правила УС от параметра **y**, приводит к ложным утверждениям (предоставляя читателю самостоятельно убедиться на примерах в существенности остальных ограничений). Ниже вместо арифметического отношения «делитель» («делит») мы пишем, как это принято в теории чисел, вертикальную черту |. Рассмотрим следующую последовательность арифметических предложений:

1. $\forall x(6|x \to 2|x)$
2. $\exists x(6|x)$
3. $6|y \to 2|y$ УВ (1).
4. $2|y$ УС (2, 3)
5. $\forall x(2|x)$ ВВ (4).

Нетрудно убедиться, что написанные в строках 1—2 предложения выражают истинные арифметические суждения, и их можно рассматривать в качестве ранее доказанных. Так, первое из них означает, что всякое число, делящееся на 6, является четным, второе утверждает, что существует число, делящееся на 6. Предложение в строке 3 следует по правилу УВ из предложения, написанного в строке 1. В строке 5 написано предложение, выражающее ложное арифметическое суждение, что всякое число является четным. Нетрудно видеть, что причина появления ложного предложения вызвана некорректным «применением» правила УС для получения $2|y$ в строке 4, так как в данном случае y входит свободно в заключения рассматриваемого применения УС, будучи в то же время собственной переменной данного правила.

Правило ВС разрешает логический переход к предложению о существовании объекта, удовлетворяющего некоторому условию, на основании предъявления конкретного примера объекта такого рода. Например, получая из предложения *Брошенный мною окурок может вызвать пожар* как следствие предложения *Существует нечто такое, что может вызвать пожар*, мы рассуждаем в соответствии с правилом ВС. Далее, переходя от предложения 2^{64} *меньше некоторого числа* к предложению. *Существует число меньше некоторого числа* мы также действуем в соответствии с этим правилом. Символически последнее рассуждение можно записать так:

1. $\exists y(2^{64} < y)$ посылка
   $\exists x \exists y(x < y)$ ВС (1).

В описанном исчислении предикатов можно выделить системы, находящиеся в отношении последовательного подчинения: 1) положительное исчислением предикатов, получаемое присоединением кванторных правил к N^{pos}; 2) минимальное исчисление предикатов, получаемое присоединением кванторных правил к N^{min} и, наконец, 3) конструктивное исчисление предикатов, получаемое присоединением кванторных правил к N^{cn}.

Прежде чем приступить к систематическому рассмотрению основных теорем логики предикатов, приведем несколько примеров с тем, чтобы читатель освоился с новой логической техникой.

Пример. Покажем, как строится доказательство формулы:

$$\exists y \forall x Rxy \rightarrow \forall z \exists u Rzu.$$

Сначала построим доказательство более простой формулы

$$\forall x Rxy \rightarrow \exists u Rzu.$$

Доказательство.

1.	$\forall x Rxy$	допущ.
2.	Rxy	УВ (1)
	$\exists u Rzu$	ВС (2)

Окончательное доказательство приводится ниже:

$$\exists y \forall x Rxy \rightarrow \forall z \exists u Rzu.$$

Доказательство.

1.	$\exists y \forall x Rxy$	допущ.
2.	$\forall x Rxy \rightarrow \exists u Rxu$	р. д. ф.
3.	$\exists u Rxu$	УС (1, 2)
	$\forall z \exists u Rzu$	ВВ (3).

Формула, написанная в строке 3, получается по УС из формул, написанных в строках 1 и 2. Обращаем внимание, что собственная переменная y рассматриваемого применения УС удовлетворяет требуемым ограничениям: y не входит свободно в допущение и в левую посылку УС[53] (там y связано) и не входит свободно в заключение УС.

Правило ВВ в этом доказательстве также применено корректно: собственная переменная x данного применения ВВ не входит свободно в допущение (там x связано) и в заключение ВВ.

В дальнейшем мы рассмотрим некоторые специфические законы логики предикатов.

P1. $\forall \mathbf{x} \mathbf{A} \rightarrow | \mathbf{A} |^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$

Доказательство.

1.	$\forall x \mathbf{A}$	допущ.
	$| \mathbf{A} |^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$	УВ (1)

P2. $| \mathbf{A} |^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}$

---

[53] Совпадающую в данном случае с единственным допущением доказательства.

Доказательство.

1. $\vdash A|_{y}^{x}$ допущ.
   $\exists x \forall$ ВС (1)

Из P1, P2 по правилу силлогизма следует

P3. $\forall xA \to \exists xA$

P4. $\forall x \forall yA \leftrightarrow \forall y \forall xA$

Приводимое ниже доказательство строится в предположении, что читатель предварительно доказал следующие формулы:

$$(a)\ \exists yA \to \exists y \exists xA,$$

$$(b)\ \exists xA \to \exists x \exists yA.$$

P5. $\exists x \exists yA \leftrightarrow \exists y \exists xA$

Доказательство.

Часть I. $\exists x \exists yA \to \exists y \exists xA$.

1. $\exists x \exists yA$ допущ.
2. $\exists yA \to \exists y \exists xA$ р. д. ф., (a)
   $\exists y \exists xA$ У$\exists$ (1, 2)

Часть II. $\exists y \exists xA \to \exists x \exists yA$

с помощью (в) исчерпывается аналогично.

Теоремы P4, P5 называются законами перестановки кванторов. Согласно этим законам начинающие формулу однородные кванторы вместе с их переменными можно менять местами. Но разнородные кванторы, которыми начинается формула, вообще говоря, нельзя переставлять. Правда, имеет место теорема

P6. $\exists y \forall xA \to \forall x \exists yA$,

но импликация, обратная к P6, недоказуема. Обращение P6 легко опровергнуть с помощью следующего арифметического контрпримера:

$$\forall x \exists y (x > y) \to \exists y \forall x (x > y).$$

Действительно, эта импликация ложна, так как ее антецедент, означающий, что для любого числа существует большее, истинен, а консеквент, означающий, что существует число, большее любого числа (в том числе и самого себя), явно ложно.

P7. $\forall x (A \to B) \to (\forall xA \to \forall xB)$.

P8. $\forall x (A \to B) \leftrightarrow (A \to \forall xB)$, где **x** не входит свободно в **A**.

P9. $\forall x (A \to B) \to (\exists xA \to \exists xB)$

P10. $\forall x (A \to B) \leftrightarrow (\exists xA \to B)$, где **x** не входит свободно в **B**.

P11. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow (\forall xA \wedge \forall xB)$

P12. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge \forall xB)$, где x не входит свободно в A.

P13. $\exists x(A \wedge B) \to (\exists xA \wedge \exists xB)$

P14. $\exists x(A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge \exists xB)$, где x не входит свободно в A.

P15. $(\forall xA \vee \forall xB) \to \forall x(A \vee B)$.

Импликация, обратная к P15, недоказуема.

P16. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow (\exists xA \vee \exists xB)$.

Теоремы P7—P16 называются законами пронесения кванторов. В них указываются условия, при которых кванторы можно вносить в область действия или выносить из области бинарной пропозициональной связки, т. е. знака конъюнкции, дизъюнкции и импликации. Существуют и другие законы пронесения кванторов. Они будут рассмотрены несколько позже.

В формулы логики предикатов могут входить так называемые вырожденные кванторы, которые не имеют в управляемой ими формуле свободных вхождений переменных, связываемых этими кванторами. Согласно приводимым ниже теоремам мы можем избавиться от вырожденных кванторов.

P17. $\forall xA \leftrightarrow A$, где x не входит свободно в A.

P18. $\exists xA \leftrightarrow A$, где x не входит свободно в A.

Обращаем внимание на то, что теоремы P1—P18 доказуемы в системе положительной логики предикатов.

Теперь мы познакомимся с законами отрицания кванторов.

P19. $\sim |A|^x_y \to \sim \forall xA$.

Доказательство.

1. $\sim |A|^x_y$	допущ.
2. $\forall xA \to |A|^x_y$	р. д. ф., P1
$\sim \forall xA$	MT (2, 1)

P20. $\sim \exists xA \to \sim |A|^x_y$

Доказательство.

1. $\sim \exists xA$	допущ.
2. $|A|^x_y \to \exists xA$	р. д. ф., P2
$\sim |A|^x_y$	MT (2, 1)

В теореме P19 формулируется закон, по которому опровергается общее прдложение, на основании ложности его частного случая. Теорема P20 утверждает, что если не существует объекта, удовлетворяющего некоторому условию, то любой результат подстановки в данное условие вместо соответствующего параметра дает ложное предложение.

Из P19, P20 по правилу силлогизма непосредственно следует:

P21. $\sim \exists x A \rightarrow \sim \forall x A$.

P22. $\sim \forall x A \leftrightarrow \exists x \sim A$.

Доказательство.

Часть I. $\sim \forall x A \rightarrow \exists x \sim A$

1. $\sim \forall x A$	допущ.
2. $\sim \exists x \sim A$	допущ. сильного косв. док.
3. $\sim \exists x \sim A \rightarrow \sim \sim A$	р. д. ф., P20
4. $\sim \sim A$	МП (2, 3)
5. A	ДО (4)
6. $\forall x A$	ВВ (5)
Пртврч: 6, 1	

Часть II. $\exists x \sim A \rightarrow \sim \forall x A$

1. $\exists x \sim A$	допущ.
2. $\sim A \rightarrow \sim \forall x A$	р. д. ф., P19
$\sim \forall x A$	УС (1, 2)

P23. $\sim \exists x A \leftrightarrow \forall x \sim A$

Теоремы P22, P23 называют законами де Моргана для кванторов. Второй из них доказуем в минимальном исчислении предикатов. Первый же проходит только в классическом исчислении предикатов.

P24. $\forall x A \leftrightarrow \sim \exists x \sim A$.

P25. $\exists x A \leftrightarrow \sim \forall x \sim A$.

Теоремы P24, P25 доказуемы только в классическом исчислении предикатов. На основании этих теорем в классической логике один из кванторов $\forall$, $\exists$ можно выразить через другой и знак $\sim$.

Формулируемые ниже дальнейшие законы пронесения кванторов доказуемы только в классическом исчислении предикатов.

P26. $\exists x (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\forall x A \rightarrow \exists x B)$

P27. $\exists x (A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow \exists x B)$, где x не входит свободно в A.

P28. $\exists x(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \leftrightarrow (\forall x\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$, где $\mathbf{x}$ не входит свободно в $\mathbf{B}$.
P29. $\forall x(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow (\mathbf{A} \vee \forall x\mathbf{B})$, где $\mathbf{x}$ не входит свободно в $\mathbf{A}$.

Для исчисления предикатов известны доказательства семантической корректности и полноты, но рассмотрение этих вопросов выходит за пределы нашего курса. Заметим, что непротиворечивость исчисления предикатов может быть доказана независимо от его семантической корректности.

Хотя исчисление предикатов представляет собой семантически полную логическую теорию, оно не является разрешимой теорией. Для исчисления предикатов не существует эффективного метода (алгоритма), позволяющего ответить на вопрос, доказуема или нет произвольная формула данного исчисления. Однако существуют обширные разрешимые фрагменты рассматриваемой логической теории, в частности, исчисление одноместных предикатов разрешимо.

Глава VI

МОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА

В модальной логике изучаются структура и законы построения рассуждений, в состав которых входят высказывания, содержащие такие логические константы, которые в русском языке обычно выражаются наречиями «необходимо», «возможно», различными формами глагола «мочь» и другими равносильными им средствами. Эти логические константы называют модальностями, или модальными операторами. К числу основных модальностей обычно относят оператор необходимости, который часто обозначается знаком $\Box$ (читается: «необходимо, что ...») и оператор возможности, который обозначается знаком $\Diamond$ (читается: «возможно, что...»).

Логическое значение (истинность, соответ. ложность) сложного высказывания, образованного с помощью модального оператора, не определяется однозначно логическим значением того высказывания, к которому применяется данный модальный оператор. Поясним сказанное примером. Пусть в некотором стручке гороха мы обнаружили 10 горошин. Тогда высказывание: *В данном стручке 10 горошин* истинно, но высказывание: *Необходимо, что в данном стручке 10 горошин,* очевидно, ложно. Между тем высказывания: *Данный стручок гороха содержит белок* и *Необходимо, что данный стручок гороха содержит белок* оба истинны.

Образно говоря, модальные операторы как бы «чувствительны» к смыслу, выраженному в соответствующих высказываниях. Этим модальные операторы отличаются от пропозициональных связок $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ классического исчисления высказываний.

Элементы модальной логики были известны уже в античности и в средние века (мы находим их у Аристотеля, стоиков, схоластов). Античным логикам и схоластам были известны некоторые основные законы модальной логики. В частности, они знали, что:

(1) $\Box \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ («Если необходимо, что **А**, то **А**»);

(2) $\mathbf{A} \rightarrow \Diamond \mathbf{A}$ («Если **А**, то возможно, что **А**»);

(3) $\Box \mathbf{A} \leftrightarrow \sim \Diamond \sim \mathbf{A}$ («Необходимо, что **А**, тогда и только тогда, когда невозможно, что не-**А**»).

(4) $\Diamond \mathbf{A} \leftrightarrow \sim \Box \sim \mathbf{A}$ («Возможно, что **А**, тогда, и только тогда, когда не необходимо, что не-**А**»).

Исследования в области теории модальностей с использованием аппарата символической логики были начаты американским логиком К. И. Льюисом (1918).

Импликации, обратные к (1), (2), т. е. $\mathbf{A} \rightarrow \Box \mathbf{A}$ и $\Diamond \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ не могут иметь места в модальной логике, так как в этом случае оказались бы доказуемыми эквивалентности $\mathbf{A} \leftrightarrow \Box \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \leftrightarrow \Diamond \mathbf{A}$, которые содержательно ложны, а формально приводят к тому, что введение модальных операторов становится излишним. Эквивалентности (3) и (4) свидетельствуют, что операторы $\Box$ и $\Diamond$ независимы. Данные соотношения позволяют выражать один из знаков $\Box$, $\Diamond$ через другой и отрицание.

Чтобы в самых общих чертах получить представление о круге проблем модальной логики, удобно начать с анализа семантики слов «необходимо», «возможно» в обычной речи. Отметим важные для нашей цели смыслы, в которых употребляются эти слова.

Iа. «Необходимо» употребляется для характеристики объективной значимости содержания высказывания. В этом случае наличие слова «необходимо», относимого ко всему высказыванию, указывает на то, что в нем формулируется закон некоторой области действительности, некоторая объективно необходимая зависимость явлений, событий, процессов и т. п.

«Возможно» в этом случае употребляется для указания на то, что в высказывании выражается объективно возможное, не исключаемое законами некоторой области действительности, положение вещей.

Iб. «Необходимо» понимается как «доказуемо», а «возможно» — как «неопровержимо» (в смысле недоказуемости отрицания). В этом случае «необходимо, что **A**» (соотв. «возможно, что **A**») означает, что **A** выводимо или доказуемо (соотв. не-**A** не выводимо, или не доказуемо) в некоторой научной теории.

II. Имеет место и такое употребление слов «необходимо» и «возможно», когда первое означает «должно» («обязательно»), а второе «допустимо» (в нормативном смысле). В этом случае слово «необходимо» (соотв., «возможно») указывает на некоторое, например, моральное или юридическое, долженствование (соотв. некоторую, например, моральную или юридическую, допустимость). Интересно, что слово «должно» (соотв. «допустимо») в свою очередь употребляется в смысле «необходимо» (соотв. «возможно»), когда последняя пара не имеет, вообще говоря, нормативного смысла.

III. Слова «необходимо» и «возможно» употребляются также и для выражения временной всеобщности (т. е. в смысле «всегда») и временного существования (т. е. в смысле «иногда») соответственно; часто с этим связывается отнесенность содержания высказывания к будущему.

Этому различию в современной логике более или менее соответствуют сложившиеся или складывающиеся группы теорий модальностей. Изучение модальных операторов, связанное со словоупотреблением, которое отмечено в пп. Iа, Iб, имеет место в наиболее большом и дифференцированном разделе модальной логики, который называют логикой **алетических** модальностей.

Пункту II отвечает раздел, называемый **деонтической логикой**, а п. III — логика **временных** модальностей.

Отмеченные аспекты модальностей содержательно различны, и как показывают исследования в области временных и нормативных модальностей не сводимы формально друг к другу. Сформулированные выше модальные законы относятся к логике собственных модальностей, но не все из них имеют аналоги в других теориях модальностей, так обстоит, например, дело с (2), если в (2) $\Diamond$ интерпретировать как «допустимо» (в этическом смысле).

Ниже мы кратко опишем одно достаточно хорошо изученное семейство модальных исчислений, которые относятся к логике алетических модальностей. Эти системы, обозначаемые в дальнейшем $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}^0$, $\boldsymbol{M}^1$, $\boldsymbol{M}^2$, строятся как расширение классического исчисления высказываний с помощью введения модального оператора $\Box$ и соответствующих аксиом, неявно определяющих этот оператор. Другие модальные операторы, в частности оператор $\Diamond$, могут быть введены с помощью соответствующих определений сокращения. Способ, который используется для построения упомянутых систем модальной логики, принадлежит К. Геделю.

Добавив к перечню исходных знаков (алфавиту) языка логики высказываний модальный оператор $\Box$, мы следующим образом введем понятие модальной формулы.

Определение модальной формулы.

1. Всякая пропозициональная буква есть модальная формула.

2а) Если **A**, **B** суть модальные формулы, то каждое из следующих выражений:

$$\sim \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$$

есть модальная формула.

б) Если **A** есть модальная формула, то $\Box$**A** также есть модальная формула.

3. Выражение считается модальной формулой тогда и только тогда, когда оно может быть построено в соответствии с пп. 1—2.[54]

---

[54] Для краткости речи мы в дальнейшем вместо «модальная формула» обычно пишем «формула».

Система M, входящая в качестве части в остальные системы M^0, M^1, M^2, получается присоединением к аксиомным схемам системы H, описанной в § 23, следующих двух аксиомных схем

A11. $\Box \mathbf{A} \to \mathbf{A}$.

A12. $\Box (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\Box \mathbf{A} \to \Box \mathbf{B})$.

Правилами вывода в системе M служат

$$\text{МП} \quad \frac{\mathbf{A} \quad \mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\mathbf{B}}.$$

$$\text{В}\Box \quad \frac{\mathbf{A}}{\Box \mathbf{A}}.$$

Второе правило называется **введением необходимости**.

Система M в некотором естественном смысле равнообъемна системе модальной логики, известной в литературе под названием системы Райта — Фейса.

Добавляя к описанию системы M аксиомную схему

$$\text{A0.} \quad \mathbf{A} \to \Box \sim \Box \sim \mathbf{A},$$

мы получаем систему M^0, которая называется брауэровской системой.

Если же к M присоединить аксиомную схему

$$\text{AI.} \quad \Box \mathbf{A} \to \Box \Box \mathbf{A},$$

то получится система M^1, равнообъемная льюисовской системе $S4$.

Наконец, система M^2, равнообъемная льюисовской системе $S5$, получается и M добавлением аксиомной схемы

$$\text{AII.} \quad \sim \Box \mathbf{A} \to \Box \sim \Box \mathbf{A}.$$

Для каждой из этих систем доказательство формулы $\mathbf{F}$ определятся как последовательность формул $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_n$, удовлетворяющая условиям:

1) для любого $i (i = 1, 2, \ldots, n)$ $\mathbf{G}_i$ или является аксиомой или получена из предшествующих формул данной последовательности по одному из правил МП, В$\Box$;

2) $\mathbf{G}_n$ есть $\mathbf{F}$.

Формула называется **доказуемой формулой**, или **логической теоремой** (в соответствующей системе), если (в данной системе) можно построить доказательство этой формулы.

В каждой из описанных систем модальный оператор $\Diamond$ вводится с помощью следующего определения:

$$\Diamond \mathbf{A} \underset{df}{=} \sim \Box \sim \mathbf{A}.$$

Используя это определение, аксиому AO системы M^0 можно записать в виде

$$\mathbf{A} \rightarrow \Box \Diamond \mathbf{A}.$$

Соотношения, в которых находятся описанные системы, можно изобразить графически:

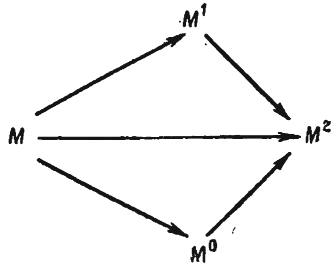


Рис. 17

Система, обозначение которой стоит у основания стрелки, содержится в системе, обозначение которой расположено у острия той же стрелки (обратное соотношение не имеет места). Таким образом, самой сильной из этих систем является M^2 — любая теорема остальных систем доказуема в M^2; самой же слабой является система M.

Кроме того, известно, что системы M^0 и M^1 дополняют друг друга до системы M^2; иначе говоря, добавление к системе M аксиомных схем A0, A1 дает систему, равнообъемную системе M^2.

Для описанных систем модальной логики мы построим их натуральные варианты, т. е. исчисления естественного вывода, равнообъемные M, M^0, M^1, M^2 соответственно. Для этого нам потребуется ввести ряд понятий.

Вхождение оператора $\Box$ в формулу **A** назовем *особенным*, если в **A** оно не находится в области действия другого вхождения оператора необходимости.

Пример.

(1) $\Box (p \rightarrow q)$;

(2) $\sim ((\Box (\sim p \vee q) \wedge p) \rightarrow \Box q)$;

(3) $\sim \Box \sim \Box p \rightarrow \Box \sim \Box \sim p$.

В формуле (1) единственное вхождение $\Box$ особенное; в формуле (2) оба вхождения $\Box$ также являются особенными, а в формуле (3) лишь первое и третье вхождение $\Box$ особенные.

Далее, вхождение оператора необходимости называется *положительным* [*отрицательным*], если оно находится в области действия $2n[2n+1]$ $(n = 0, 1, \ldots)$ знаков отрицания; при этом наличие данного вхождения в антецеденте импликации считается за нахождение его в области действия знака отрицания.[55] Выше в примере так обстоит дело с этим свойством. В формуле (1) единственное вхождение □ положительное; в формуле (2) первое вхождение □ положительное, а второе — отрицательное; наконец, в формуле (3) первое и третье вхождения □ являются положительными, а второе и четвертое — отрицательными.

Вхождение пропозициональной буквы в формулу называется модализованным (соотв. положительно модализованным), если оно находится в области действия вхождения оператора □ (соотв. особенного положительного вхождения оператора □). Заметим, что всякое положительно модализованное вхождение пропозициональной буквы является в то же время и модализованным. Обратное, вообще говоря, неверно.

Так, выше в (1) и (3) все вхождения пропозициональных букв положительно модализованы, а следовательно и модализованы. Во (2), все вхождения q и первое вхождение p модализованы; второе вхождение p не модализовано и только первые вхождения p и q положительно модализованы.

Натуральные варианты систем $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}^1$, $\boldsymbol{M}^2$ получаются добавлением к правилам логического следования описанной в § 16 системы $\boldsymbol{N}$ правил введения и удаления оператора □

$$\text{В}\Box \quad \frac{\mathbf{A}}{\Box\mathbf{A}}; \qquad \text{У}\Box \quad \frac{\Box\mathbf{A}}{\mathbf{A}}.$$

Натуральные варианты систем $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}^1$, $\boldsymbol{M}^2$ различаются ограничениями, наложенными на применение правила В□.

1) Ограничение на правило В□ в системе $\boldsymbol{M}$. При построении доказательств правило В□ применяется, если среди формул, предшествующих посылке **A** рассматриваемого применения В□, найдутся формулы $\Box\mathbf{B}_1, \Box\mathbf{B}_2, \ldots, \Box\mathbf{B}_n$ ($n = 0, 1, \ldots$) такие, что ранее доказана кратная импликация

$$\mathbf{B}_1 \to (\mathbf{B}_2 \to \ \ldots \ (\mathbf{B}_n \to \mathbf{A}) \ldots).$$

2) Ограничение на правило В□ в системе $\boldsymbol{M}^1$ (соотв. $\boldsymbol{M}^2$). При построении доказательств В□ применяется, если в формулах, написанных ранее в качестве допущений (в том числе и в качестве допущения косвенного доказательства), все вхождения пропозициональных букв положительно модализованы (соотв., модализованы).

Натуральный вариант системы $\boldsymbol{M}^0$ получается из натурального варианта системы $\boldsymbol{M}$ добавлением к правилам следования правила

$$\text{R}^0 \quad \frac{\mathbf{A}}{\Box\sim\Box\sim\mathbf{A}}.$$

---

[55] Это мотивируется тем, что в классической логике высказываний $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ эквивалентно $\sim\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$.

В натуральных вариантах описанных систем модальной логики оператор $\Diamond$ вводится по определению, как выше.

Мы опускаем доказательство равнообъемности систем ***М***, ***М***^{0}, ***М***^{1}, ***М***^{2} их натуральным вариантам[56] и приступаем к рассмотрению основных законов модальной логики. До тех пор, пока не оговорено противное, в доказательствах мы пользуемся логическими средствами натурального варианта системы ***М***.

М1. $\Box \mathbf{A} \to \mathbf{A}$

Доказательство.

1. $\Box \mathbf{A}$ допущ.
2. $\mathbf{A}$ У$\Box$ (1)

М 2. $\Box(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\Box \mathbf{A} \to \Box \mathbf{B})$

Доказательство.

1. $\Box(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ } допущ.
2. $\Box \mathbf{A}$ }
3. $\mathbf{A}$ У$\Box$ (2)
4. $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ У$\Box$ (1)
5. $\mathbf{B}$ МП (3, 4)

$\Box \mathbf{B}$ В$\Box$ (5)

Обращаем внимание на то, что в данном доказательстве правило В$\Box$ применено с соблюдением наложенных на него в натуральном варианте системы ***М*** ограничений, так как: (1) ранее посылки **В** рассматриваемого применения правила В$\Box$ написаны формулы $\Box \mathbf{A}$, $\Box(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ и (2) подпоследовательность формул, написанных в строках 3, 4, 5, дает доказательство формулы

$$\mathbf{A} \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{B}).$$

Заметим, что установленные выше теоремы служат аксиомами в системе ***М***.

М3. $\Box(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow (\Box \mathbf{A} \wedge \Box \mathbf{B})$

М4. $(\Box \mathbf{A} \vee \Box \mathbf{B}) \to \Box(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$

М5. $\Box(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \to (\Box \mathbf{A} \leftrightarrow \Box \mathbf{B})$

Импликация, обратная к М4, недоказуема ни в одной из рассматриваемых систем модальной логики.

М6. $\sim \mathbf{A} \to \sim \Box \hat{\mathbf{A}}$

М7. $\mathbf{A} \to \Diamond \mathbf{A}$

---

[56] См.: Серебрянников О. Ф. Эвристические принципы и логические исчисления. М., 1970.

Доказательство.

1. $\mathbf{A} \to \sim\sim \mathbf{A}$ — р. д. ф., Т14, 3
2. $\sim\sim \mathbf{A} \to \sim \Box \sim \mathbf{A}$ — р. д. ф., М6
3. $\mathbf{A} \to \sim \Box \sim \mathbf{A}$ — сил (1, 2)

$\mathbf{A} \to \Diamond \mathbf{A}$ — *Df* (3).

Последняя строка в этом доказательстве получается как результат применения определения оператора $\Diamond$. Вообще говоря, ее можно было бы и не писать.

М8. $\sim \Diamond \mathbf{A} \to \sim \mathbf{A}$.

Из теорем М1 и М7 по правилу силлогизма следует М9

М9. $\Box \mathbf{A} \to \Diamond \mathbf{A}$.

По этому же правилу из М8 и М6 получаем М10.

М10. $\sim \Diamond \mathbf{A} \to \sim \Box \mathbf{A}$.
М11. $\Diamond \mathbf{A} \leftrightarrow \sim \Box \sim \mathbf{A}$.
М12. $\Box \mathbf{A} \leftrightarrow \sim \Diamond \sim \mathbf{A}$.
М13. $\sim \Box \mathbf{A} \leftrightarrow \Diamond \sim \mathbf{A}$.
М14. $\sim \Diamond \mathbf{A} \leftrightarrow \Box \sim \mathbf{A}$.
М15. $\Box (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\Diamond \mathbf{A} \to \Diamond \mathbf{B})$.
М16. $\Diamond (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \to (\Diamond \mathbf{A} \wedge \Diamond \mathbf{B})$.
М17. $\Diamond (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow (\Diamond \mathbf{A} \vee \Diamond \mathbf{B})$.
М18. $\Diamond (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \leftrightarrow (\Box \mathbf{A} \to \Diamond \mathbf{B})$.

Из специфических теорем натурального варианта системы $\boldsymbol{M}^1$ мы рассмотрим

М19. $\Box \mathbf{A} \to \Box\Box \mathbf{A}$.

Доказательство.

1. $\Box \mathbf{A}$ — допущ.

$\Box\Box \mathbf{A}$ — $\mathbf{B}\Box$ (1).

Эта теорема служит аксиомой системы $\boldsymbol{M}^1$. Из теорем М1, М19 следует

М20. $\Box \mathbf{A} \leftrightarrow \Box\Box \mathbf{A}$.

С помощью этой теоремы мы можем избавляться от итерации операторов необходимости, т. е. сводить цепочки следующих друг за другом знаков $\Box$ к одному такому знаку $\Box$.

М21. $\Diamond \mathbf{A} \leftrightarrow \Diamond\Diamond \mathbf{A}$

Эта теорема в свою очередь позволяет избавляться от итерации операторов возможности.

M22. $(\Box \mathbf{A} \vee \Box \mathbf{B}) \leftrightarrow \Box (\Box \mathbf{A} \vee \Box \mathbf{B})$.

M23. $(\Box \mathbf{A} \wedge \Box \mathbf{B}) \leftrightarrow \Box (\Box \mathbf{A} \wedge \Box \mathbf{B})$.

M24. $\Box (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \Box (\Box \mathbf{A} \to \Box \mathbf{B})$.

Рассмотрим теперь некоторые теоремы натурального варианта системы $\boldsymbol{M}^2$:

M25. $\sim \Box \mathbf{A} \to \Box \sim \Box \mathbf{A}$

Доказательство.

1. $\sim \Box \mathbf{A}$ допущ.
   $\Box \sim \Box \mathbf{A}$ В $\Box$ (1)

M25 является аксиомой системы $\boldsymbol{M}^2$.

M26. $\Diamond \mathbf{A} \to \Box \Diamond \mathbf{A}$

M27. $\sim \Box \mathbf{A} \leftrightarrow \Box \sim \Box \mathbf{A}$.

Частным случаем M2 является

M28. $\Diamond \mathbf{A} \leftrightarrow \Box \Diamond \mathbf{A}$.

Теоремы M 26 и M 27 можно использовать также для редукции итерированных модальностей. Из теорем M 7 и M 27 по правилу силлогизма следует

M29. $\mathbf{A} \to \Box \Diamond \mathbf{A}$

В системе $\boldsymbol{M}^0$ данная формула является аксиомой. Таким образом, в натуральном варианте $\boldsymbol{M}^2$ производно правило R^0.

M30. $\Diamond \Box \mathbf{A} \to \Box \Diamond \mathbf{A}$.

Доказательство.

1.	$\Box \mathbf{A} \to \mathbf{A}$	р. д. ф., M1
2.	$\Box (\Box \mathbf{A} \to \mathbf{A})$	В $\Box$ (1)
3.	$\Box (\Box \mathbf{A} \to \mathbf{A}) \to (\Diamond \Box \mathbf{A} \to \Diamond \mathbf{A})$	р. д. ф., M15
4.	$\Diamond \Box \mathbf{A} \to \Diamond \mathbf{A}$	МП (2, 3)
5.	$\Diamond \mathbf{A} \to \Box \Diamond \mathbf{A}$	р. д. ф., M2
	$\Diamond \Box \mathbf{A} \to \Box \Diamond \mathbf{A}$	Сил (4, 5)

Импликация, обратная к M 30, недоказуема. Заметим, что M 30 можно было бы доказать в $\boldsymbol{M}^0$.

На этом мы заканчиваем обзор основных теорем модальной логики. Как и для исчисления предикатов, существуют доказательства семантической корректности и полноты для систем модальной логики. Доказательство их непротиворечивости может быть также сведено к доказательству непротиворечивости классического исчисления высказываний. В отличие от исчисления предикатов, рассмотренные модальные системы являются разрешимыми теориями

Упражнения:

I. Показать, что в системе $\mathbf{M}^0$ (или ее натуральном варианте) доказуема формула вида

$$\Diamond \Box \mathbf{A} \to \Box \Diamond \mathbf{A}.$$

II. Доказать в системе M (или ее натуральном варианте) следующие формулы:

1. $\sim \Diamond (\Box p \land \Box \sim p)$
2. $\Box (\Diamond p \lor \Diamond \sim p)$
3. $\Box (p \to q) \leftrightarrow \sim \Diamond (p \land \sim q)$ ·

III. Показать, что системы M^0 и M^1 дополняют друг друга до M^2 в следующем смысле: присоединив к системе M в качестве аксиом формул вида

$$\mathbf{A} \to \Box \Diamond \mathbf{A}$$

$$\Box \mathbf{A} \to \Box \Box \mathbf{A}$$

дает систему, равнообъемную системе M^2.

Указание. Следует использовать законы контрапозиции и закон (условного) силлогизма.

ОГЛАВЛЕНИЕ